I 24774

2022

CTO R104
ani 1934-1942

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XXI.

—

ANUL 1941—1942.

BIBL... STRA"
...SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCA"
1942

'06

AN 2014

I 24774

ANUL XXI. MARTIE 1941 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **G-L GH. BUICLIU:** 20 DE ANI, MAJORATUL.
2. **TH. ANGHELUTA:** DETERMINAREA SUBSTITUTIILOR ORTOGONALE, A CAROR MODUL ESTE UN DETERMINANT SIMETRIC,
3. **CPT. C. COSTACHESCU:** REZOLVAREA CATORVA PROBLEME DE NAVIGATIE COSTIERA CU AJUTORUL TRIGONOMETRIEI PATRATICE.
4. NOTE MATEMATICE: 1.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 1834, 1839, 1876.
7. PROBLEME PROPUSE: 1922-1930.
8. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMIȘOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

2468

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.
2. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, Strada M. Cogălniceanu 31, Bucureşti.
3. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, Bucureşti.
4. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
5. **Almăjan P.** Locot., Licenţiat în matematici, str. Zaharia 23, Bucureşti.
6. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, înzestrarea căilor ferate, întinderea exploatării, la Şc. Polit., Timişoara.
7. **Andronescu P.** Doctor-Inginer, Profesor de Electrotechnică la Şc. Polit., Rectorul Şc. Politechnice din Timişoara.
8. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.
9. **Ardeleanu Şt.**, Inginer, Subdirector liceul industrial, Timişoara.
10. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
11. **Baidaff B. I.** Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).

12a. **Bădescu Radu,** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.

12. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie la Şc. Polit., Timişoara.
13. **Bănărescu M.** Inginer, Director la Atelierele C. F. R., Profesor la Catedra de Maşinii Termice şi Decan la Şc. Polit., Timişoara, str. Doja 51.
14. **Bărglăzan A.** Inginer, Conferenţiar la Maşini Hidraulice, dela Şc. Polit., Timişoara.
15. **Baron C.** Şef de lucrări la catedra de Fizică dela Şc. Politechnică, Timişoara.

15a. **Beneş Paul.** Prof. la lic. Schewitz-Thierrin, Bucureşti.

16. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Profesor onorar la Şc. Polit., Timişoara.
17. **Bobârnac M.** Inginer, Soc. Astra, Braşov.
18. **Bonea I.** Inginer, Profesor la Topografie şi Geodezie, Şcoala Politechnică, Timişoara.
19. **Botez M.** Doctor în Matematici, Directorul Şcoalei Superioare de Comerţ din Piatra-Neamţ.
20. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi Liceul Militar, str. Speranţei 12, Iaşi.
21. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la catedra de astronomie dela Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.
22. **Buiclu Gh.** General de Artilerie. Fost 10 ani profesor de Geometrie Analitică la Şcoala Politechnică din Timişoara. Însărcinat cu conferinţa de Balistică Exterioară la Şcoala Politechnică din Bucureşti, str. M. Cogălniceanu 10, Bucureşti II.
23. **Câlniceanu C.** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini la Şc. Polit., T-şoara.
24. **Călugăreanu George,** Doctor în Matematici, Conferenţiar de Matematici Generale la Universitatea din Cluj (Timişoara).
25. **Cândea C.** Doctor-Inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie la Şc. Polit., din Timişoara.
26. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Şc. Polit. din Timişoara.
27. **Claudian Virgil,** Profesor la liceul Mihai Viteazul din Bucureşti.
28. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de Limba engleză la Şc. Polit. din Timişoara.
29. **Coman A.** Profesor liceul „C. Diaconovici-Loga", Profesor onorific la Şc. Polit. din Timişoara.
30. **Comănescu A.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din T.-Măgurele.
31. **Constantinescu G. G.** Licenţiat în Matematici, Bucureşti.
32. **Constantinescu Gh.** Profesor la lic. Lazăr, Bucureşti.
33. **Contrea A.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şii Petrografie dela Şc. Polit., Timişoara.
34. **Costăchescu V. C.** Căpt. de Marină, Constanţa.
35. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică, Timişoara.
36. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Şc. Polit., Timişoara.
37. **Cserveny I.** Inginer, U. D. R., Reşiţa.
38. **Curea I.** Doctor în Matematici, Astronom la Observatorul Astronomic din Cluj, provizor la T-şoara.
39. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
40. **Diaconescu N.** Profesor la liceul din Slatina.
41. **Dobrozemsky M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
42. **Dumitriu-Dada,** Profesor la Colegiul Carol I, Craiova.
43 **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
44. **Frătici I.** Inginer Asistent pe lângă catedra de Cazane, dela Şc. Politechnică, Timişoara.
45. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti.
46. **Gheorghiu V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Hidraulică dela Şc. Polit., Timişoara.
47. **Gheorghiu Th. Gh.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică, Timişoara.
49. **Ghermănescu M.** Doctor în Matematici, Profesor la catedra de Mecanică, dela Şc. Polit., Timişoara.
49. **Ghiţescu Spiridon,** Profesor secundar, Mizil.
50. **Hristea H.** Inginer-Inspector General la C. F. R.
51. **Gloden A.** Doctor în Matematici, Profesor à l'Athénée, Rue Jean Jaurés 11, Luxembourg.
52. **Ionescu-Biss P. H.** Licenţiat în Matematici, Bucureşti.
53. **Ionescu Bujor C-tin,** Licenţiat în Matematici, Profesor, str. Precupeţii Vechi 40, Bucureşti, 3.

54a. **Ionescu D. V.** Doctor în Matematici, Profesor şi Decan la Universitatea din Cluj, provizor în Timişoara.

54. **Ionescu-Ţiu D. C.** Locot., Licenţiat în Matematici, Calea Griviţei 158, Bucureşti.
55. **Ivănescu Cezar,** Profesor liceul militar, Târgovişte.
56. **Kielburger M.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Electrotechnică dela Şc. Polit., Timişoara.
57. **Kühn I.** Doctor în Chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie Generală dela Şc. Polit., Timişoara.
58. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică, Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială la Şc. Polit., Timişoara.

59. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şcoala Polit., Timişoara.
60. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Polit., Timişoara.
61. **Linteş I.,** Comandor Doctor Inginer, Conferenţiar, Şcoala Politechnică, Bucureşti.
62. **Liteanu Gh.** General de Artilerie, Strada Carageale, Bucureşti.
63. **Lupan A.** Inginer, Prof. la Şc. Polit. din Timişoara.
64. **Macovschi Eug.,** Doctor în Chimie, Profesor la Facultatea de Ştiinţe, Bucureşti.
65. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şcoala Politechnică, Timişoara.
66. **Mardan D.** Inginer inspector general, Directorul Fabricei de tutun. Prof. la Şc. Polit. din Timişoara.
67. **Mărculescu Origen,** Profesor la Colegiul „Carol I", Craiova.
68. **Marinescu I.** Doctor-Inginer. Conferenţiar la Şc. Politechnică din Timişoara.
69. **Mateescu S.** Doctor în Ştiinţele Naturale. Profesor la Catedra de Geologie dela Şc. Polit. din Timişoara.
70. **Mereuţă Emilian.** Licenţiat în Matematici, Str. Vatra Luminoasă 89, Bucureşti IV.
71. **Mihăileanu N. N.** Profesor secundar, Bucureşti.
72. **Mioc V.** Licenţiat în Matematici, Directorul liceului Loga, Asistent pe lângă catedra de Analiza Matematică dela Şc. Polit. din Timişoara.
73. **Murgulescu Elena.** Licenţiată în Matematici, Asistentă la Şcoala Polit. din Timişoara.
74. **Murgulescu G. I.** Doctor în chimie. Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
75. **Musta Ştefan,** Inspector-General secundar. Str. Pavel 4, Beiuş.
76. **Nadaşan Şt.** Doctor-Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor dela Şcoala Polit., Timişoara.
77. **Naneş Gh.** Profesor pensionar, Bucureşti.
78. **Nicolau A.** Inginer Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
79. **Nicolau P., Inginer,** Profesor la Şcoala Politechnică, Timişoara.
80. **Ogrin N.** Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
81. **Onicescu O.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, str. Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
82. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
83. **Orăşeanu Gr.,** Profesor secundar, Director General al învăţământului secundar, Bucureşti.
84. **Patriciu Valeriu.** Doctor, Profesor la catedra de Geologie Economică şi Zăcăminte, la Şcoala Politechnică, Timişoara.
85. **Petrescu A.** Profesor la Academia Agricolă, Bucureşti.
86. **Popescu E.** Doctor în chimie, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
87. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şcoala Polit. din Timişoara.
88. **Popescu N. Corneliu,** Profesor, str. Piscului 6, Bucureşti.
89. **Predoescu I. M.,** Inginer la Societatea „Astra Română", Jud. Prahova.
90. **Protopopescu I.** Inginer-Şef, Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
91. **Purcariu I.** Doctor în Fizică, Prof. la Academia Comercială, Bucureşti.
92. **Raclis N. R.** Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Profesor Bucureşti.
93. **Răduleţ R.** Doctor-Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
94. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.
95. **Sauciuc L.** Doctor în chimie, Şef de lucrări la Catedra de Chimie dela Şc. Polit. din Timişoara.
96. **Savin C. Ion.** Licenţiat în Matematici, str. Sărăriei 56, Iaşi.
97. **Schileriu I.** Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
98. **Schram Edith,** Inginer, asistentă la Şcoala Politechnică, Timişoara.
99. **Scărlătescu D.** Inginer, Profesor la liceul industrial din Timişoara.
100. **Scorpan Al.** Inginer, depoul C. F. R., Asistent la Şcoala Politechnică, Timişoara.
101. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Profesor la Universitatea din Cluj, 12 Str. Milano, Timişoara.
102. **Severineanu C.** Inginer-Şef, Inspectorul Tracţiunii C. F. R., Profesor la Şc. Polit., Timişoara.
103. **Simionescu D. Gh.** Licenţiat în Matematici Profesor secundar, Bucureşti.
104. **Smighelschi O.** Inginer la Fabrica „Nitrogen", Dicio-Sân-Martin.
105. **Stamatescu I.** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
106. **Stambuleanu A.,** Doctor-Inginer, Conferenţiar Şc Politechnică, Timişoara.
107. **Stan A.** Căpitan de Artilerie, licenţiat matematici, Bucureşti.
108. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
109. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Şc. Polit., Timişoara.
110. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini dela Şcoala Politechnică din Timişoara.
111. **Stoicescu M.** Profesor la lic. „G. Lazăr", Bucureşti.
112. **Teodorescu C.** Inginer-Şef, Rector la Şcoala Politechnică din Bucureşti.
113. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură din Cluj.
114. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometrie Analitică dela Şc. Polit., Timişoara.
115. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului de perfecţionare al Şcoalei Politechnice din Timişoara, Str. Londra 44, Bucureşti.
116. **Viciu Aurel.** Profesor la lic. Milit., Tg.-Mureş.
117. **Vişa Eugen.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din Arad.
118 **Vlad I. V.** Inginer-Architect, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
119. **Vlădescu I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şcoala Polit. din Timişoara.
120. **Zăgănescu I.** Inginer la C. F. R. şi Profesor la Şc. Polit., Timşoara.
121. **Zaharia N. O.** Profesor, Constanţa.
122. **Zapan Gr.,** Comandor-Aviator, Inginer de construcţii aeronautice şi mecanice (E. N. S. A. Paris). Şeful Serviciului Technic al Regiunii 3 Aeriene, str. Pasteur 44, Bucureşti 6.

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noăstre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că, începând de la 15 Martie c., mai fac parte dintre membrii „R. M. T." şi D-nii: Profesor *Corneliu N. Popescu,* vechi şi distins corespondent şi Profesor *Paul Beneş,* Bucureşti.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XXI — No. 1 TIMISOARA, MARTIE 1941

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN
Şcoala Politechnică, Timişoara.

20 DE ANI, MAJORATUL.

DE G-L GH. BUICLIU.

In anul 1920 răsărise cel mai frumos soare pe cerul mult frământatei *Istorii a Neamului Românesc.* Sub razele acelui soare înmugureau toate soluţiile nouilor probleme pe care *Ţara* le cereau rezolvate. Marele savant matematician şi inimosul *Tr. Lalescu,* bănăţean de origine, reuşeşte să înfiinţeze *Şcoala Politechnică din Timişoara* ale cărei cursuri încep în Noembrie 1920, cu următorul corp profesoral:

Tr. Lalescu, Analiza şi Directorul Şcoalei,
C. C. Teodorescu, Mecanica şi Sub-Director,
Loct-Col. *Gh. Buicliu, Geometria Analitică,*
Dr. Ing. C. *Cândea, Chimia,*
Dr. *C. Stăncescu, Fizica,*
Ing. *V. Vlad, Geometria Descriptivă,*
Profesor *Kaldor, Desemnul,*
Profesor *A. Coman, Conferenţiar de Matematici Superioare.*

Examenul de întrare din Noembrie 1920 pune în evidenţă imperioasa necesitate a unui instrument de pregătire de matematici elementare în care elevul de liceu să poată găsi material care să-l stimuleze la studiul matematicelor. Un astfel de instrument exista încă cu 26 de ani înainte, era *Gazeta Matematică* din Bucureşti, al cărei nivel era însă prea ridicat pentru nevoile liceanului din *toate* provinciile ţărei şi mai ales din provinciile care, în mod firesc, ar fi alimentat cu contingentele cele mai puternice studenţimea nouei şcoli technice înfiinţate în capitala Banatului.

Problema şi-a pus-o *Tr. Lalescu* şi tot el a rezolvat-o. Cam pe la finele lui Ianuarie 1921 a venit la locuinţa mea din Timişoara, Bulevardul Mihai Viteazul No. 5 şi mi-a cerut să prepar articole, note, probleme pentru revista noastră Găsise tipografie, noua tipografie românească *„Cartea Românească“,* care se deschisese în Timişoara, şi găsise mijloace materiale pentru asigurarea tipărirei revistei pe câte-va luni. Aceste mijloace *„le veţi mai complecta şi spori şi voi“,* î-mi spunea *Tr. Lalescu.*

Stabilise formatul şi numele revistei, ba avea chiar o copertă trasă ca model, şi observase că cele două culori ale imprimatelor de pe copertă va ridica ceva preţul revistei, *„dar asta nu face nimic“. Tr. Lalescu* era darnic în sacrificii.

In fine stabilise ca revista să apară în 12 numere pe an, la 15 ale fie-cărei luni, primul număr urmând să apară la 15 Martie 1921. La sugestia mea, ca revista să iasă la 1 ale lunei, mi-a răspuns că 1 are mai puţin conţinut de cât 15 şi apoi *„aşa ne-am învăţat de la Gazeta Matematică“.*

Nici o dată nu cred că e mai nimerită ca acum, sublinierea acestei legături cu tradiţia bună, cu trecutul constructiv. *Gazeta Matematică* avea, la Martie 1921, 26 ani de existenţă, stimulase în domeniul frământărilor matematice toată elita gânditoare a ţărei şi crease prin înalta etică morală a fondatorilor şi conducătorilor ei un spirit de entuziasm desinteresat, o atitudine de sacrificiu şi o disciplină de gândire şi de lucru, care se chiamă *„spiritul gazetei“* şi care răsădit în ori ce ramură de activitate nu se poate de cât să dea roadele cele mai excelente.

Tr. Lalescu a vrut să folosească această pildă şi a folosit-o până într'atât în cât în primul număr de la 15 Martie 1921 publică drept model de probleme de rezolvat 4 probleme luate din *Gazeta Matematică,* unde fusese propuse pe vremuri de cei patru stâlpi ai *Gazetei Matematice: I. Ionescu, G. Ţiţeica, V. Cristescu* şi *A. G. Ioachimescu.*

Structura *Revistei Matematice din Timişoara* este, evident, analoagă cu a *Gazetei Matematice.*

Impulsul dat de *Tr. Lalescu* se transformă în o mişcare continuă bogată şi ascendentă. D-l *V. Vâlcovici,* numit rector al şcoalei, în cursul anului 1921, susţine revista R. M. T. materialiceşte şi moraliceşte publicând din primele zile ale rectoratului său interesantul articol *Metode Geometrice* în numărul de la 15 Ianuarie 1922, precum şi note şi probleme propuse.

D-l *V. Alaci* fiind numit profesor la Şc. Politechnică din Timişoara, apare în mod natural şi ca membru în comitetul de conducere al R. M. T. cu începere din chiar ziua numirii sale ca profesor, 1 Noemvrie 1921. D-sa ia această sarcină în înţelesul ei mecanic, şi-o aşează solid pe spinare şi în câte-va luni el este sufletul şi viaţa R. M. T. El este redijor, el corector, el de toate şi aşa continuă să fie şi azi.

Cu împulsul primit de la *Tr. Lalescu,* cu linia directoare a *Gazetei Matematice,* cu munca de titan a d-lui *V. Alaci* şi cu colaborarea membrilor din comitet, revista *„Revista Matematică din Timişoara"* a împlinit azi 15 Martie 1941, 20 ani de existenţă. In filele celor 20 de volume ale revistei, se găsesc publicate frământările încercărilor matematice a 20 de generaţii tinere. Mulţi din acei foşti *„tineri corespondenţi"* sunt astăzi technicieni de seamă în corpul inginerilor ţărei, unii profesori sau militari de ştiinţă, câţi-va savanţi cu renume peste frontieră.

In aceşti 20 ani de apariţie continuă *„Revista Matematică din Timişoara"* a pus la îndemâna îndrumătorilor de ştiinţe matematice un număr de 1921 de probleme, numeroase note şi articole şi a publicat studii originale demne de cele mai serioase buletine. Este destul să citez *„Trigonometria patratică"* a d-lui prof. *V. Alaci* şi clasicele proprietăţi geometrice stabilite de d-nii prof. *D. V. Ionescu* şi *O. N. Ţino* în articolele publicate de d-lor în Vol. XX.

Azi *Revista Matematică din Timişoara,* a ajuns la majorat, păşind în anul al 21-lea va fi repartizată de recrutorul ştiinţific în grupa publicaţiilor de fond şi de durată, iar eu ca unul ce am participat la înfiinţarea ei şi ca membru continuu al ei de atunci şi până acum, î-mi îngădui să scriu rândurile de faţă cu intenţia de a fixa un fir istoric şi cu urarea ca *Revista Matematică din Timişoara* să-şi continue activitatea încă foarte mulţi ani, dezbătând probleme din ce în ce mai interesante, fără însă a se îndepărta de la scopul elementar, pentru care a fost înfiinţată.

DETERMINAREA SUBSTITUŢIILOR ORTOGONALE, A CĂROR MODUL ESTE UN DETERMINANT SIMETRIC

DE

Prof. Th. ANGHELUŢĂ.

1. Ştim că substituţia liniară

(1) $x_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \cdots + \alpha_{in} y_n, \quad i=1,2,\ldots,n$

este ortogonală dacă avem identitatea

(2) $\qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$

oricare ar fi $y_1, y_2, \ldots, y_n$, valorile lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind date de (1). Pentru aceasta, coeficienţii α_{ik} trebue să satisfacă următoarele $\frac{n(n+1)}{2}$ egalităţi:

(3) $\alpha_{1i}\alpha_{1k} + \alpha_{2i}\alpha_{2k} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nk} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i=k \\ 0 \quad \text{„} \quad i \neq k. \end{cases}$

Prin urmare, din cei n^2 coeficienţi α_{ik} rămân arbitrari, $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ coeficienţi.

Cayley[1] a dat o metodă pentru exprimarea coeficienţilor α_{ik}, care satisfac egalităţile (3), în funcţie raţională de $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri.

2. În rândurile, care urmează, voiu da un mijloc de a forma transformările ortogonale (1), a căror modul,

(4) $$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

este un determinant simetric, adică să avem egalităţile

(5) $$\alpha_{ik} = \alpha_{ki},$$

care sunt în număr de $\frac{n(n-1)}{2}$.

---

[1]) Crelles Journal, 1846; *Kronecker,* Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1890.
Th. Angheluţă, Curs de Algebră Superioară, litografiat, 1940, p. 122.

Transformarea ortogonală (1) depinde de $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri. Transformările pe care le căutăm satisfac şi egalităţile (5). Ar urma că nu există de cât o singură transformare ortogonală pentru care determinantul (4) să fie simetric. Vom vedea însă că transformările ortogonale, care au acest determinant simetric, depind de $n-1$ parametri. După ce voiu forma aceste transformări, voiu da explicaţia acestui fapt analitic.

3. Să determinăm coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ aşa încât transformarea

$$(6)\quad y_1 = \lambda_1 x_1 + \alpha_1 X, \qquad y_2 = \lambda_2 x_2 + \alpha_2 X, \ldots$$
$$y_n = \lambda_n x_n + \alpha_n X,$$

unde

$$X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

să fie ortogonală. După cum am văzut, trebue să avem identitatea

$$(7)\quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (\lambda_1 x_1 + \alpha_1 X)^2 + (\lambda_2 x_2 + \alpha_2 X)^2 + \cdots + (\lambda_n x_n + \alpha_n X)^2$$

oricare ar fi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt presupuşi daţi şi diferiţi de zero. Identitatea (7) dă $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaţii din care trebue să deducem $2n$ necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Problema pare imposibilă, pentru $n > 3$, căci atunci $\frac{n(n+1)}{2} > 2n$. Cu toate acestea vom vedea că cele $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaţii sunt compatibile.

Egalând coeficienţii lui x_2^2 din ambii membri ai identităţii (7), obţinem ecuaţia

$$a_i^2 \alpha_1^2 + a_i^2 \alpha_2^2 + \cdots + a_i^2 \alpha_{i-2}^2 + (\lambda_i + a_i \alpha_i)^2 + a_i^2 \alpha_{i+1}^2 + \cdots + a_i^2 \alpha_n^2 = 1.$$

Această ecuaţie se poate scrie încă

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{i-1}^2 + (\mu_i + \alpha_i)^2 + \alpha_{i+1}^2 + \cdots + \alpha_n^2 = m_i^2,$$

unde am notat

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{a_i}, \qquad m_i = \frac{1}{a_i}.$$

Făcând în această ecuaţie $i = 1, 2, \ldots, n$ vom obţine n ecuaţii,

$$(8)\quad \begin{cases} (\mu_1 + \alpha_1)^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_n^2 = m_1^2 \\ \alpha_1^2 + (\mu_2 + \alpha_2)^2 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_n^2 = m_2^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \cdots + (\mu_n + \alpha_n)^2 = m_n^2. \end{cases}$$

Egalând cu zero coeficienţii termenilor $x_1 x_2$, $x_1 x_3, \ldots, x_{n-1} x_n$, obţinem alte $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaţii

$$(\lambda_1 + a_1 \alpha_1) a_2 \alpha_1 + (\lambda_2 + a_2 \alpha_2) a_1 \alpha_2 + a_1 a_2 \alpha_3^2 + \cdots + a_1 a_2 \alpha_n^2 = 0,$$
$$(\lambda_1 + a_1 \alpha_1) a_3 \alpha_1 + a_1 a_3 \alpha_2^2 + (\lambda_3 + a_3 \alpha_3) a_1 \alpha_3 + a_1 a_3 \alpha_4^2 + \cdots + a_1 a_3 \alpha_n^2 = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Legea de formare a acestor ecuaţii este evidentă. Folosind notaţiile de mai sus, aceste ecuaţii iau forma

$$(9)\quad \begin{cases} (\mu_1 + \alpha_1)\alpha_1 + (\mu_2 + \alpha_2)\alpha_2 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0 \\ (\mu_1 + \alpha_1)\alpha_1 + \alpha_2^2 + (\mu_3 + \alpha_3)\alpha_3 + \alpha_4^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ecuaţiile (8) le scriem sub forma

$$(10)\quad \begin{cases} 2\mu_1 \alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = m_1^2 - \mu_1^2 \\ 2\mu_2 \alpha_2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = m_2^2 - \mu_2^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2\mu_n \alpha_n + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = m_n^2 - \mu_n^2. \end{cases}$$

Ecuaţiile (9) devin de asemenea

$$(11)\quad \begin{cases} \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0 \\ \mu_1 \alpha_1 + \mu_3 \alpha_3 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Scăzând prima ecuaţie din (11) pe rând din prima şi a doua ecuaţie din (10), avem

$$\mu_1 \alpha_1 - \mu_2 \alpha_2 = m_1^2 - \mu_1^2$$
$$\mu_2 \alpha_2 - \mu_1 \alpha_1 = m_2^2 - \mu_2^2$$

prin urmare

$$m_1^2 + m_2^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$$

şi în acelaşi mod

$$m_2^2 + m_3^2 = \mu_2^2 + \mu_3^2$$
$$m_3^2 + m_1^2 = \mu_3^2 + \mu_1^2.$$

Din ultimele trei ecuaţii deducem

$$m_1^2 = \mu_1^2, \quad m_2^2 = \mu_2^2, \quad m_3^2 = \mu_3^2.$$

Avem aşa dar

$$m_i^2 = \mu_i^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Luând

$$m_i = \mu_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

şi ţinând seamă de notaţii, obţinem

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1. \tag{13}$$

Ecuaţiile (10) şi (11), ţinând seamă de (12 şi (13), devin

$$\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_2}{a_2} = \cdots = \frac{\alpha_n}{a_n} = -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2).$$

Notând $\frac{\alpha_i}{a_i} = k$ pentru $i = 1, 2, \ldots . n$, ecuaţiile precedente dau

$$k = -\frac{2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Prin urmare coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt determinaţi,

$$\alpha_1 = -\frac{2a_1}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}, \ldots,$$

$$\alpha_n = -\frac{2a_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Avem astfel identitatea

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 - \frac{2a_1}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} X)^2 + \cdots$$

$$\cdots + (x_n - \frac{2a_n}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} X)^2,$$

unde X este expresia dată mai sus.

Pentru prescurtarea scrisului, suntem conduşi să punem

$$b_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}, \ldots, \quad b_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}. \tag{14}$$

Transformarea (6 căutată este aşa dar

$$y_1 = x_1 - \frac{2a_1}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} X, \ldots,$$

$$y_n = x_n - \frac{2a_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} X.$$

Ţinând seamă de expresia lui X, această transformare devine

$$\begin{cases} y_1 = (1 - 2b_1^2)x_1 - 2b_1 b_2 x_2 - \cdots - 2b_1 b_n x_n \\ y_2 = -2b_1 b_2 x_1 + (1 - 2b_2^2)x_2 - \cdots - 2b_2 b_n x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = -2b_1 b_n x_1 - 2b_2 b_n x_n - \cdots + (1 - 2b_n^2)x_n \end{cases} \tag{15}$$

Aceasta transformare este evident ortogonală, căci ea satisface identitatea (7). Mai observăm apoi că modulul ei

$$\begin{vmatrix} (1-2b_1^2) & -2b_1 b_2 & \cdots & -2b_1 b_n \\ -2b_1 b_2 & (1-2b_2^2) & \cdots & -2b_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2b_1 b_n & -2b_2 b_n & \cdots & (1-2b_n^2) \end{vmatrix} \tag{16}$$

este un determinant simetric. Prin urmare coeficienţii transformării (15) satisfac condiţiile (5.

Această transformare depinde de $n-1$ parametri, căci din ecuaţiile (14), deducem

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 1. \tag{17}$$

Observări. 1°. Se vede imediat şi direct că transformarea (15) este ortogonală, căci suma patratelor elementelor de pe aceiaş linie ale determinantului (16), este unitatea Avem în adevăr

$$(1 - 2b_1^2)^2 + 4b_1^2 b_2^2 + \cdots + 4b_1^2 b_n^2 = 1,$$

după cum rezultă din (17).

Apoi suma produselor elementelor corespunzătoare depe două linii diferite ale determinantului (16) este nulă

$$-2(1 - 2b_1^2)b_1 b_2 - 2(1 - 2b_2^2)b_1 b_2 +$$

$$4b_1 b_2 b_3 + \cdots + 4b_1 b_2 b_n = 0,$$

după cum se vede numai de cât.

2°. In cazul particular $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, avem frumoasa identitate

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = [x_1 - \frac{2}{n}(x_1 + \cdots x_n)]^2 + \cdots$$

$$\cdots + [x_n - \frac{2}{n}(x_1 + \cdots + x_n)]^2,$$

întâlnită de mult regretatul prof. *Angelescu* şi de d-l prof. *Pompeiu* într'o problemă de analiză.

4. Îmi rămâne să arăt că transformările ortogonale (1), a căror coeficienţi satisfac egalităţile de simetrie (5), depind de $n-1$ parametri. Pentru

aceasta voiu arăta că ecuaţiile (3) şi (5) formează un sistem nedeterminat şi că rezolvarea acestui sistem depinde de $n-1$ parametri. Să considerăm din 3) numai ecuaţiile în care $i \neq k$

$$(18) \quad \alpha_{1i}\alpha_{1k} + \alpha_{2i}\alpha_{2k} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nk} = 0,$$

şi care sunt în număr de $\frac{n(n-1)}{2}$. În virtutea acestor ecuaţii şi a ecuaţiilor 5), voiu dovedi că suma patratelor elementelor de pe aceiaşi linie a determinantului (4), este aceiaşi pentru toate liniile.

În adevăr din sistemul liniar

$$(19) \quad \begin{cases} X_1 = \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n, \end{cases}$$

deducem, ţinând seamă de ecuaţiile (18)

$$(20) \quad \begin{cases} E_1^2 x_1 = \alpha_{11}X_1 + \cdots + \alpha_{n1}X_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n^2 x_n = \alpha_{1n}X_1 + \cdots + \alpha_{nn}X_n, \end{cases}$$

unde

$$E_i^2 = \alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \cdots + \alpha_{ni}^2.$$

Dar sistemul (19), rezolvat după regula lui *Cramer*, ne dă

$$(21) \quad \begin{cases} D\,x_1 = A_{11}X_1 + \cdots + A_{n1}X_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ D\,x_n = A_{n1}X_1 + \cdots + A_{nn}X_n, \end{cases}$$

unde D este determinantul 4), iar A_{ik} este complimentul algebric al elementului α_{ik} din acest determinant.

Expresiile lui x_k din (20) şi (21) trebue să fie identice. Egalând coeficienţii lui X_i din aceste expresii, avem egalitatea

$$\frac{\alpha_{ik}}{E_k^2} = \frac{A_{ki}}{D}$$

şi egalitatea analoagă schimbând pe i cu k

$$\frac{\alpha_{ki}}{E_i^2} = \frac{A_{ik}}{D}.$$

Dar determinantul (4) fiind presupus simetric, rezultă

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \qquad A_{ki} = A_{ik}$$

şi deci

$$E_k^2 = E_i^2.$$

Prin urmare ecuaţiile (3), in care $i=k$ se reduc la una singură în baza ecuaţiilor (5) şi (18). Avem prin urmare în total $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1$ ecuaţii pentru determinarea celor n^2 coeficienţi α_{ik}. Rămân arbitrari $n^2 - n(n-1) - 1 = n-1$ coeficienţi. Transformarea (15) depinde tocmai de $(n-1)$ parametri Scopul urmărit prin rândurile aceste este astfel indeplinit.

3°. O proprietate caracteristică a transformării (15), este că ea şi cu inversa ei sunt identice, în adevăr, avem

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2b_1^2 y_1 - 2b_1 b_2 x_2 - \cdots - 2b_1 b_n x_n \\ x_2 = -2b_1 b_2 y_1 + (1 - 2b_2^2)x_2 - \cdots - 2b_2 b_n x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = -2b_1 b_n y_1 - 2b_2 b_n x_2 - \cdots + (1 - 2b_n^2)x_n. \end{cases}$$

4°. Se ştie că modulul unei transformări ortogonale este ± 1, căci patratul lui este 1. Voiu calcula determinantul (16) pentru a ridica îndoiala asupra dublului sens.

Determinantul

$$D(x) = \begin{vmatrix} x + a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x + a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & x + a_{nn} \end{vmatrix}$$

este un polinom de gradul n în x. Coeficientul termenului în x^{n-p} este suma minorilor determinantului D(0) care se obţine suprimând p linii şi p coloane de acelaşi indice.

Determinantul (16) are forma determinantului D x) numai că $x = 1$. Observăm apoi că avem

$$\begin{vmatrix} -2b_2^2 & -2b_1 b_2 - \cdots - 2b_1 b_n \\ -2b_1 b_2 - 2b_2^2 - \cdots - 2b_2 b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -2b_1 b_n - 2b_2 b_n - \cdots - 2b_n^2 \end{vmatrix} = 0, \quad n \neq 1.$$

De asemenea toţi minorii acestui determinant, obţinuţi suprimând p linii şi p coloane de acelaşi indice, sunt nuli, exceptând numai acei pentru care $p = n-1$. Prin urmare avem

$$\begin{vmatrix} (1 - 2b_1^2) - 2b_1 b_2 - \cdots - 2b_1 b_n \\ -2b_1 b_2 (1 - 2b_2^2) - \cdots - 2b_2 b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -2b_1 b_n - 2b_2 b_n - \cdots + (1 - 2b_n^2) \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = -1.$$

Cazuri particulare. 1°. $n=2$. Transformarea (15) devine punând $b_1 = \sin\frac{\alpha}{2}$, $b_2 = \cos\frac{\alpha}{2}$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ y_2 = -x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha \end{cases}$$

2°. $n=3$. Avem

$$\begin{cases} y_1 = (1-2b_1^2)x_1 - 2b_1 b_2 x_2 - 2b_1 b_3 x_3 \\ y_2 = -2b_1 b_2 x_1 + (1-2b_2^2)x_2 - 2b_2 b_3 x_3 \\ y_3 = -2b_1 b_3 x_1 - 2b_2 b_3 x_2 + (1-2b_3^2)x_3. \end{cases}$$

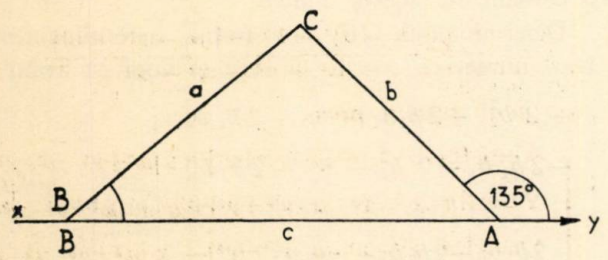
Aceste transformări se pot deduce din transformările ortogonale, care depind de 3 parametri[1], după cum se vede lesne.

REZOLVAREA CÂTORVA PROBLEME DE NAVIGAȚIE COSTIERĂ CU AJUTORUL TRIGONOMETRIEI PATRATICE[2].

DE

Cpt. C. COSTĂCHESCU.

1. **Problemă.** *Fie xy drumul urmat de o navă a cărei viteză este v.*



La un moment dat se relevează farul C *sub unghiul* B. *După timpul t se relevează farul sub unghiul* 135°. *Se cere distanța la far în momentul relevmentului al doilea, în funcție de* B, *v și t.*

Soluție. Conform *teoremei 1-a* de la triunghiurile semi-dreptunghice din *„Trigonometria patratică“*, avem:

$$b = c\sqrt{2}\ sp\,B$$

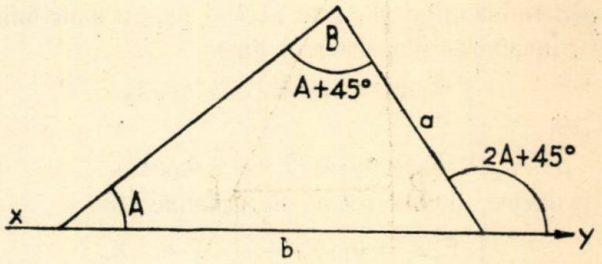
Aplicație. $v = 12$ noduri,

$t = 20^m$,

$B = 30°$,

$$b = 4\sqrt{2} \times 0.36602 = 2{,}03 \text{ Mile.}$$

2. **Problemă** *Fie xy drumul unei nave a cărei viteză este v.*



La un moment dat se relevează farul B, *sub unghiul* A.

După timpul t relevmentul la far este 2 A + 45°.

Se cere distanța la far în momentul celui de al doilea relevment în funcție de A, *v, t.*

Soluție. Se știe din aceiași teoremă folosită în problema de la n-rul 1, că

$$a = b\sqrt{2}\ sp\,A = v\,t\sqrt{2}\ sp\,A.$$

Aplicație. $v = 20$ noduri, $t = 15^m$, $A = 40°$.

$$a = 5\sqrt{2} \times 0{,}45625 = 3{,}24 \text{ Mile.}$$

3. **Problemă**. *Pe o coastă sunt trei faruri* A, B, C,

— farurile A *și* B *sunt situate pe același meridian* B *la* N *de* A.

— farurile A *și* C *sunt situate pe același paralel* C, *la Est de* A.

O navă având un drum cuprins în sectorul S E *viteză 10 noduri la Ora = 12 vede cele 2 faruri* A *și* B *pe aceiași linie.*

După un timp oarecare farul B *apare spre* W, *iar* C *spre Sud, la distanță egală de 4 Mile.*

La O = 14^h *farurile* A *și* C *apar pe aceiași linie.*

Se cere drumul navei. (*Nicholls's,* concise guide, to the Navigation examinations).

Soluție. Va trebui să calculăm unghiul θ în funcție de

---

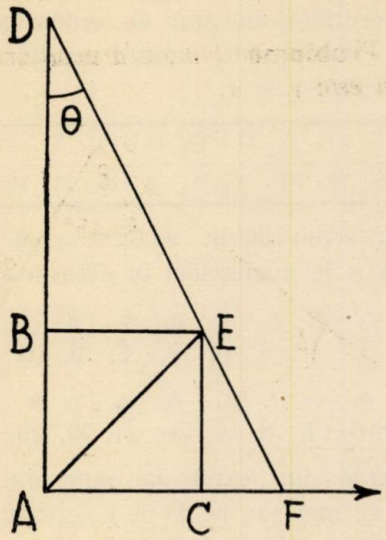
[1]) *Th. Angheluță,* Cursul citatt, p. 125.

[2]) *V. Alaci. „Trigonometria Patratică“.*

$DF = 20$ Mile şi $EA = \sqrt{4^2 + 4^2}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$,

AE este deci bisectoare unghiului drept din triunghiul DAF.



Vom întrebuinţa formula 35 dela pag. 95 din *„Trigonometria patratică"*

$$800\, sp^2\theta - 800\, sp\,\theta + 4\sqrt{2}\,(\sqrt{832} - 4\sqrt{2}) = 0$$

Rezolvând, găsim

$$\theta = 14^0\,36'.$$

Drumul este deci

S $14^0\,36'$ E

NOTE MATEMATICE

1. — *Sur l'équation indéterminée*

$$X^3 + Y^3 = U^3 + V^3.$$

Nous supposerons que a est le $p.g.c.d$ de X et de Y, b celui de U et de V. Nous supposons a et b premiers entre eux. L'équation proposée s'écrit, en posant $X = a\,x$, $Y = a\,y$, $U = b\,u$, $V = b\,v$,

$$\frac{a^3(x+y)}{b^3(u+v)} = \frac{u^2 - u\,v + v^2}{x^2 - x\,y + y^2}.$$

Cette équation est satisfaite şi nous posons

$$x^2 - x\,y + y^2 = \varrho\, b^3(u+v)$$
$$u^2 - u\,v + v^2 = \varrho\, a^3(x+y).$$

Or, les diviseurs d'une forme primitive sont de la même forme, soit $\varrho = r^2 - r\,s + s^2$

$$b^3(u+v) = m^2 - m\,n + n^2$$
$$a^3(x+y) = p^2 - p\,q + q^2.$$

Comme on a

$$(m^2 + \alpha\, m\, n + n^2)(r^2 + \alpha\, r\, s + s^2) = t^2 + \alpha\, t\, z + z^2,$$

avec

(I) $\quad t = m\,r - n\,s, \quad z = n\,r + (m + \alpha\, n)\,s,$

(II) $\quad t = m\,s - n\,r, \quad z = n\,s + (m + \alpha\, n)\,r,$

on aura

$$x = m\,r - n\,s, \quad y = n\,r + (m - n)\,s,$$
$$u = p\,r - q\,s, \quad v = q\,r + (p - q)\,s.$$

On n'a d'ailleurs pas besoin de considérer les formules (II) qui se déduisent de (I) en remplaçant r par s et vice-versa.

Il reste la condition

$$\frac{a^3[(m+n)\,r + (m - 2\,n)\,s]}{b^3[(p+q)\,r + (p - 2\,q)\,s]} = \frac{p^2 - p\,q + q^2}{m^2 - m\,n + n^2}.$$

On en déduit

$$\frac{r}{s} = \frac{b^3[(p-q)^3 - q^3] - a^3[(m-n)^3 - n^3]}{a^3(m^3 + n^3) - b^3(p^3 + q^3)}.$$

Remplaçons $a\,m$ par μ, $a\,n$ par ν, $b\,p$ par π et $b\,q$ par x, il vient

$$\frac{r}{s} = \frac{(\pi - x)^3 - x^3 - [(\mu - \nu)^3 - \nu^3]}{\mu^3 + \nu^3 - \pi^3 - x^3},$$

et, à un facteur près,

$$\begin{cases} X = \mu\,[(\pi - x)^3 - x^3 - (\mu - \nu)^3 + \nu^3] + \nu\,(\mu^3 + \nu^3 - \pi^3 - x^3) \\ Y = \nu\,[(\pi - x)^3 - x^3 - (\mu - \nu)^3 + \nu^3] + (\mu - \nu)\,(\mu^3 + \nu^3 - \pi^3 - x^3) \\ U = \pi\,[(\pi - x)^3 - x^3 - (\mu - \nu)^3 + \nu^3] - x\,(\mu^3 + \nu^3 - \pi^3 - x^3) \\ V = x\,[(\pi - x)^3 - x^3 - (\mu - \nu)^3 + \nu^3] + (\pi - x)\,(\mu^3 + \nu^3 - \pi^3 - x^3) \end{cases}$$

Ces formules à 4 paramètres donnent *toutes* les solutions de l'équation proposée.

Exemples:

μ	ν	π	x	
4	3	2	1	$80^3 + 15^3 = 71^3 + 54^2\ (= 515.375)$
5	4	3	1	$9^3 + (-6)^3 = 1^3 + 8^3$
5	1	4	3	$480^3 + (-51)^3 = 461^3 + 232^3.$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVI, No. 6, Februarie 1941. Calculul vectorial, de Dr. Ing. *Plautius Andronescu*. Asupra alterării traectoriilor balistice sub influenţa pierderilor de viteză iniţială, de Maior *I. Linteş*. Asupra criteriilor de convergenţă *Raabe* şi *Bertrand*, de *G. G. Constantinescu*. Insemnări asupra punctului lui *Miquel*, de *Ion Ilie*. *Gh. Hergopol*. Concursul *„Gazetei Matematice“*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *W. Sierpinski*. Lecţiuni despre mulţimele analitice.

3. *P. Sergescu*. Mathématiciens français du temps de la Revolution Française. (Analele Academiei Române, 1940).

4. *Jean-Louis Destouches*. Essai sur la forme générale des théories physiques

5. Dr. *Tiberiu Popoviciu*. Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame.

6. Prof. *Ioan Curea*. Determinarea polului ceresc pe cale astrografică.

7. *Vincenzo G. Cavallaro*. Sulla formula che exprime una distanza variabile in funzione di tre distanze assegnate (1940).

8. † *Giuseppe Tacchella*. Sulla rappresentazione analitica di figure composte.

9. *A. Maior* The Use of High-Frequency Alternating Currents in Telegraphy, Telephony and for Power Transmission (1914).

10. *A. Maior*. Sur un probléme relatif à la transmission de l'énérgie électrique (1920).

11. *A. Maior*. Temperature and Gravitation.

12. *A. Maior*. Wärmerösung im Gravitationsfelde (1928).

13. *A. Maior*. Über Strahlung im Gravitationsfelde (1932).

14. *A. Maior*. Une nouvelle formule dans la théorie du rayonnement (1934).

15. *A. Maior*. Énergie et radiation dans l'univers en expansion (1935).

16. *A. Maior*. Zum Thermodynamischen Symbolismus.

17. *A. Maior*. Energie-Übertragung mittels Wechsel-Strömen hoher Frequenz (1939).

18. *A. Maior*. Apropos d'une nouvelle théorie relativiste (1939)

19. *A. Maior*. Nicht-Euklidische Mechanik des Atomkern-Inneren (1940).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1834. — *Ştiind că o literă din alfabet se înlocueşte prin valoarea funcţiuni*

$$y = -2x + 49,$$

unde x reprezintă numărul de ordine al literei în alfabet, să se descifreze textul

$$\overline{13}\,.\,\overline{23}\,.\,\overline{9} \qquad 47\,.\,13\,.\,39 \qquad 41\,.\,19\,.\,7 \qquad 47$$

$$-3\,.\,39\,.\,43\,.\,31 \qquad 41\,.\,39 \qquad 47\,.\,21\,.\,31.$$

Barele îndică litere mari, iar punctele separă literile.

C-TIN JIDANU

Soluţie. Dând lui y pe rând valorile din text, o singură dată, obţinem cu uşurinţa din relaţia dată, valorile lui x,

$$x = \frac{49 - y}{2},$$

care reprezintă numărul de ordine al literei din alfabet. Putem astfel întocmi următorul tablou de valori pentru y şi x.

y	13	23	9	47	39	41	19	7	−3	43	31	21
x	18	13	20	1	5	4	15	21	26	3	9	14

Acum scrim literile alfabetului în ordinea lor naturală şi le numerotăm în această ordine, avem

a, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, *m*,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,

n, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *v*, *w*, *x*, *y*, *z*.
14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

Numerile din textul dat reprezintă pe y, iar tabloul de mai sus ne dă pe x corespunzător, conform relaţiei date, x indicând numărul de ordine al literei din alfabet, cum se vede în numerotarea de mai sus.

Textul numeric dat, conform tabloului de mai sus şi a literilor corespunzătoare valorilor numerice ale lui x din tablou, are următoarea transpunere în cuvinte:

R. M. T. are douăzeci de ani.

Soluţii date de d-rele: *Checian N. Ana* (studentă, Timişoara). *Papadopol-Demetra Elena* (bacalaureată, Bacău) şi de d nii: *Aldea V. Mircea* (Buzău), *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Boleanţu Lazăr* (lic. Loga, Timişoara), *Cârlan S. Nicolae* (lic. Tecuci), *Cristea I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Herlea V. Valeriu* (student, Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt. Roman), *Radoslav I.* (lic. Lugoj), *Schapira Solo* (Piatra-Neamţ), *Simon Ş. Petru* (lic. Arad), *Stefanovici I. Mircea* (Bucureşti), *Tilica Ştefan* (Sub-Lt), *Ţarălungă Savel* (lic. Internat, Iaşi) şi *Văduva F. Marin* (bacalaureat, Giurgiu).

Problema 1839. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare, avem:*

$$\frac{r_a - r_b}{1 + r_a r_b} + \frac{r_b - r_c}{1 + r_b r_c} + \frac{r_c - r_a}{1 + r_c r_a} = \frac{p^2 (a-b)(b-c)(c-a)}{S\left(1 + S\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)\left(1 + S\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right)\left(1 + S\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)}.$$

CEZAR IVANESCU

Soluția dată de d-l *Mircea A. Negrea.*

Avem succesiv:

$$(1)\quad \sum \frac{r_a - r_b}{1 + r_a r_b} = \frac{\Sigma (r_a - r_b)(1 + r_b r_c)(1 + r_c r_a)}{(1 + r_a r_b)(1 + r_b r_c)(1 + r_c r_a)}$$

$$= \frac{\Sigma r_a^2 (r_c - r_b)}{(1 + r_a r_b)(1 + r_b r_c)(1 + r_c r_a)}.$$

Insă:

$$(2)\quad \sum r_a^2 (r_c - r_b) = \sum \frac{S^2}{(p-a)^2} \cdot \left(\frac{S}{p-c} - \frac{S}{p-b} \right)$$

$$= \sum \frac{S^3 (p - b - p + c)}{(p-a)^2 (p-b)(p-c)}$$

$$= \sum \frac{S (c-b) p (p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2 (p-b)(p-c)}$$

$$= p S \sum \frac{c-b}{p-a} = \frac{p S \Sigma (c-b)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= p S \frac{p^2 \Sigma (c-b) - p \Sigma (c^2 - b^2) + \Sigma b c (c-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{p^2 S \Sigma b c (c-b)}{p (p-p)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 S (a-b)(b-c)(c-a)}{S^2},$$

deci:

$$(3)\quad \sum r_a^2 (r_c - r_b) = \frac{p^2 (a-b)(b-c)(c-a)}{S}.$$

Apoi:

$$1 + r_a r_b = 1 + \frac{S^2}{(p-p)(p-b)} =$$

$$1 + S \frac{\sqrt{p (p-a)(p-b)(p-c)}}{(p-a)(p-b)} =$$

$$1 + S \sqrt{\frac{p (p-c)}{(p-a)(p-b)}} =$$

$$= 1 - S \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p (p-c)}}} = 1 + S \operatorname{cotg} \frac{C}{2},$$

deci

$$(4)\quad \Pi (1 + r_a r_b) =$$

$$(1 + S \operatorname{cotg} \frac{C}{2})(1 + S \operatorname{cotg} \frac{A}{2})(1 + S \operatorname{cotg} \frac{B}{2}).$$

Impărțind relațiile (2) și (3) și ținând seamă de (1), obținem,

$$\sum \frac{r_a - r_b}{1 + r_a r_b} =$$

$$\frac{p^2 (a-b)(b-c)(c-a)}{S (1 + S \operatorname{cotg} \frac{A}{2})(1 + S \operatorname{cotg} \frac{B}{2})(1 + S \operatorname{cotg} \frac{C}{2})}$$

adică identitatea cerută.

Alte soluții date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara), *Cristea I. Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Gloden A.* (Luxembourg), *Tilică Ștefan* (Sub-Lt) și *Vostinariu Gheorghe* (bacalaureat).

Problema 1876. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sqrt[4]{\frac{x+2}{y}} + \sqrt[4]{\frac{y}{x+2}} = 2 \\ \sqrt{y - \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{y+3}} = 0. \end{cases}$$

MARIN F. VADUVA

Ridicăm prima ecuație la patrat. Trecem apoi al 2-lea termen din ecuație a 2-a în membrul al doilea și ridicăm iarăși la patrat, obținem:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+2}{y}} + 2 + \sqrt{\frac{y}{x+2}} = 4 \\ y - \sqrt{x+1} = x + \sqrt{y+3}. \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri:

$$\begin{cases} x + 2 + y = 2\sqrt{y (x+2)} \\ y - x = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+3}. \end{cases}$$

Ridicând iarăși la patrat ambele ecuații, avem încă:

$$(1)\quad \begin{cases} (x + 2 + y)^2 = 4 y (x+2) \\ (y - x)^2 = x + y + 4 + 2\sqrt{(x+1)(y+3)}. \end{cases}$$

Dezvoltând patratul din prima ecuație, observăm în urmă că, ea se poate scri sub forma

$$(x - y + 2)^2 = 0, \quad \text{deci} \quad (2) \quad x = y - 2.$$

Inlocuind valoarea găsită pentru x în a 2-a ecuație din (1), găsim

$$4 = 2y - 2 + 4 + 2\sqrt{(y-1)(y+3)},$$

sau

$$(y-1)^2 = (y-1)(y+3).$$

Această ecuație este satisfăcută, evident, numai pentru

$$y = 1$$

și atunci din (2), găsim $x = -1$.

Astfel avem singurul sistem de soluții

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1, \end{cases}$$

care, verificând sistemul inițial, constitue sistemul de soluții al sistemului dat.

Au rezolvit problema, d-ra *Checian Ana* (studentă Timișoara), *Boerescu P. S.* (Lt., Constanța), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt., Roman), *Radoslav S. I.* (Șc. Polit. București), *Țarălungă Savel* (lic. Internat, Ian), *Tilică Ștefan* (Sub-Lt) și *Voștinariu Gheorghe* (bacalaureat).

PROBLEME PROPUSE

1922. — Să se determine toate patratele de trei cifre și de patru cifre, care în sistemul zecimal se scriu cu cifre consecutive într'o ordine oarecare.

A. GLODEN

1923. — Cu cifrele de la 1 la 9 inclusiv, luate odată, să se formeze trei patrate perfecte.

V. THÉBAULT

1924. — Să se rezolve sistemul:

$$\sqrt{3\Sigma x^{-1} - 2} = \sqrt{\Sigma (xy)^{-1} - 1} = \sqrt{(xyz)^{-1} + 1} = 5$$

IOAN N. GLIGOR

1925. — Se consideră șirul cu termenul general u_n, astfel ca

$$u_n = p\, u_{n-1} + u_{n-2}, \quad (u_0 = 1,\ u_1 = p),$$

p fiind un număr dat.

Să se demonstreze că seria

$$\frac{1}{u_0 u_2} + \frac{1}{u_1 u_3} + \cdots + \frac{1}{u_n u_{n+2}} + \cdots$$

este convergentă și să i se găsească suma.

M. GHERMANESCU

1926. — Din fie-care punct M al dreptei Δ se duc tangentele M A, M B la un cerc fix O. Se cere locul ortopolului dreptei Δ față de triunghiul M A B.

G-L GH. BUICLIU

1927. — Tangenta dusă în vârful A al unei elipse de centru O este tăiată în N de tangenta dusă în punctul oarecare M. Se cere locul geometric al punctului de întretăiere al dreptelor A M și O N când punctul M descrie elipsa.

CORNELIA NANES

1928. — Să se stabilească identitatea:

$$2 \times 5^n \sin n\varphi = [(2 - i)^{2n} - (2 + i)^{2n}]\, i,$$

unde,

$$\varphi = \operatorname{arc\,cotg} 2, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Să se verifice pentru $n = 2$ și $n = 3$.

V. ALACI

1930. — Două puncte materiale M_1 și M_2 descriu două drepte rectangulare Ox și Oy cu mișcări uniforme:

1°. Să se determine momentul și pozițiile acestor puncte când distanța dintre ele este minimă.

2°. Fie $M_1^0(x_0, 0)$ și $M_2^0(0, y_0)$ pozițiile inițiale ale acestor puncte $(t = 0)$. Să se arate că locul punctelor $M_0(x_0, y_0)$, cărora le corespunde o distanță minimă d egală cu 0, este o dreaptă D.

3°. In caz când punctul M_0 nu se află pe această dreaptă, să se arate că distanța minimă d este egală cu distanța de la M_0 la dreapta D.

4°. Fie X și Y coordonatele corespunzătoare pozițiilor punctelor M_1 și M_2 pentru care d e minimă. Punctul M (X, Y) se află la intersecția paralelei cu D dusă prin M_0, cu perpendiculara din origine pe dreapta D.

5°. Să se dea o construcție geometrică a poziției segmentului $\overline{M_1 M_2}$ când are cea mai mică lungime.

RADU BADESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Aldea A. Minea. (1630, 1631, 1647, 1648, 1652, 1664, 1665, 1667, 1674, 1981, 1682, 1687, 1688, 1690, 1691, 1692, 1693, 1697, 1698, 1710, 1716, 1717, 1828, 1741, 1842, 1757, 1763, 1789, 1793, 1799, 1810, 1817, 1818, 1827, 1840, 1848, 1850, 1851, 1855, 1856, 1863, 1871, 1876, 1883, 1884, 1888, 1895, 1896, 1899, 1903); *Boleanţu Lazăr* (1828, 1831, 1836, 1937); *Cârlan S. Nicolae* (1760, 1817, 1906, 1907); *Checian N. Ana* (1681, 1752, 1817, 1855, 1885, 1902, 1906, 1907, 1911); *Enăchescu Ion* (1817, 1818, 1902, 1904, 1912); *Gloden A.* (1802, 1825, 1827, 1851, 1866, 1868, 1871, 1895, 1896, 1898, 1904); *Mang Ileana* (1895, 1899, 1909); *Moldovan Teodor* (1777, 1827, 1834, 1856); *Săruleşteanu Emanuil* (140, 1319, 1895, 1902, 1903, 1904); *Simon Petru* (1827, 1829, 1839, 1840, 1844, 1846, 1948, 1850, 1851, 1855, 1856, 1867, 1471, 1876, 1879. 1885, 1887, 1888, 1891, 1892, 1895, 1896;) *Schapira Salo* (1845, 1856, 1883, 1902, 1903, 1906, 1912); *Ţarălungă Savel* (1895, 1902); *Vasiliu D-tru* (1413, 1697, 1777, 1839, 1856, 1879, 1887, 1890, 1891, 1902, 1904, 1912).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Rareş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamţ.
5. *Stelian Cetăţeanu,* Calea Serban-Vodă 108, Bucureşti.
6. *Petre Sergescu,* profesor Universitar, Str. Ghica-Vodă 12, Craiova.
7. *Corneliu N. Popescu,* profesor de matematici, Str. Pisculni 6, Bucureşti 6.

Toţi d-nii abonaţi de mai sus, vor primi toate numerile din urmă, când timpul va permite expedierea lor.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Lucrare premiată de „ACADEMIA ROMÂNĂ"

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XXI. APRILIE 1941 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. D-RA F. BRATILA SI P. SERGERCU: COMBINARI GENERALIZATE.
2. NOTE MATEMATICE: 2, 3.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1732, 1818, 1819, 1827, 1837.
5. PROBLEME PROPUSE: 1931-1938.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că, începând de la 15 Martie 1941 mai face parte dintre membrii „R. M. T." şi distinsul Dr. *George Călugareanu,* conferenţiar la Facultea de Ştiinţi din Cluj (provizor în Timişoara).

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XXI — No. 2 TIMISOARA, APRILIE 1941

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

COMBINĂRI GENERALIZATE

de

D-ra F. BRĂTILĂ și P. SERGESCU.

Secția de matematici a Universității din Cluj a organizat, de doisprezece ani, un *Seminar de Matematici,* condus de D-l prof *T. Angheluță,* cu scopul de a pregăti pe studenți în vederea examenului de capacitate. În ședințele de Marți studenții expun lucrări originale sau memorii recente din reviste matematice. In ședințele de Joi se lucrează probleme date la examenele de licență sau de capacitate din țară și din străinătate. Toți profesorii secției iau parte la ședințe și intervin adesea în discuție. În ciuda nenorocirilor ce s'au abătut pe capul țării și al nostru, munca de la *Seminarul din Cluj* a renăscut în refugiu la *Timișoara,* unde numărul nostru s'a mărit cu profesorii Școalei Politecnice din Timișoara. În una din ședințele din Februarie 1941 s'a expus un memoriu al D-lui *E. Galvez Laguarta* publicat în ultimul număr al revistei *Universidad* din Zaragoza (XVII, nr. 3, Sept. 1940, pp. 469—474). Acest memoriu a fost completat într'o altă ședință cu găsirea formulei generale și a servit studenților ca să le arate mecanismul cercetării matematice. Credem că rezumarea celor două ședințe ale seminarului, consacrate combinărilor generalizate, poate fi interesantă pentru cititorii R. M. T. punându-le probleme noui de analiză combinatoare.

D-l *Galvez Laguarta* a avut nevoe de combinările generalizate în cercetările sale în legătură cu probleme biologice (probabil relațiile reciproce între două specii de animale convietuitoare).

Analiza combinatoare e strâns legată de probleme de probabilitate. În 1654, *Fermat* și *Pascal* au pus bazele calculului probabilităților, într'o serie de scrisori asupra jocurilor de noroc. Pentru evaluarea șanselor, s'a pus problema găsirii numărului de grupe distincte ce se pot face din m obiecte distincte, dacă fiecare grupă conține p obiecte. Acest număr, numit Combinări de m obiecte luate câte p, se notează C_m^p. *Pascal* îl găsise încă de pe la 1640, când a construit și faimosul său triunghiu aritmetic. Acest triunghiu a fost punctul de plecare al lui *Leibniz,* către 1672, când a construit triunghiul armonic (cu inversele elementelor triunghiului aritmetic) de la care a ajuns la Calculul Diferențelor.

Combinările se bucură de proprietățile fundamentale exprimate prin relațiile bine cunoscute:

$$(1) \qquad C_m^p = C_m^{m-p}, \qquad C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}.$$

Aceste relații pot fi generalizate, fie prin aplicarea lor succesivă, fie prin o altă grupare a elementelor cu care formăm combinările.

Fie p elemente $a_1, a_2, \ldots, a_p$ și s elementele $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Putem împărți cele C_{p+s}^k grupe distincte în felul următor: 1. În clasa întâia fiecare grupă nu conține nici un element a, ci numai elemente b. Sunt C_s^k astfel de grupe. 2 În clasa doua fiecare grupă conține o literă a și deci $k-1$ litere b. Pentru fiecare a avem C_s^{k-1} grupe. Dar, avem C_p^1 elemente a. Ca atare, clasa doua conține $C_p^1 C_s^{k-1}$ grupe. 3 În clasa treia fiecare grupă conține două litere a și deci $k-2$ litere b. La fiecare $a_i\, a_j$ avem C_s^{k-2} grupe. Dar există C_p^2 grupe distincte $a_i\, a_j$. Rezultă că clasa treia conține $C_p^2 C_s^{k-2}$ grupe.... $k+1$. Ultima clasă o formăm numai din grupele care nu conțin nici un element b. Vor fi C_p^k grupe, formate numai din cele p elemente a. Adunând la un loc numărul grupelor din fiecare clasă, obținem formula:

$$(1\text{bis}) \qquad C_{p+s}^k = C_p^0 C_s^k + C_p^1 C_s^{k-1} + C_p^2 C_s^{k-2} + \cdots + C_p^k C_s^0.$$

Evident că în (1 bis) termenii, în care indicele superior e mai mare ca p sau ca s, sunt nuli. Formula e cunoscută şi se demonstrează în general identificând coeficientul lui a^k din $(1+x)^{p+s}$ şi din produsul $(1+x)^p(1+\lambda)^s$.

Graţie operii lui *Laplace*, calculul probabilităţilor a devenit în veacul al XIX-lea o ramură fundamentală a matematicii şi a condus la o metodă nouă de investigaţie în fizica matematică, şi în alte domenii, numită *metoda statistică*. În ultimii cincizeci de ani, învăţaţii au început să aplice metodele matematice şi în *biologie*. Precursorul acestei tentative a fost *V. Volterra* († 1940), care s'a ocupat de problema biologică a luptei pentru existenţă. Era vorba de convieţuirea între două specii deosebite de animale, de evoluţia speciilor, de înmulţirea, întinderea, dispariţia, etc. lor. Aceste fenomene au fost studiate cu aparat matematic înalt, cu ecuaţii diferenţiale şi funcţionale, etc. Una din concluziile neaşteptate ale calculului a fost aceea că dacă o specie e carnivoră şi cealălaltă pacifică, specia cea rea nu poate distruge cu totul specia cea bună Există un minimum al întinderii speciei bune. Când minimul a fost atins, specia cea bună începe să se înmulţiască. Concluzie consolantă, care dovedeşte în mod matematic că niciodată briganzii, nu vor stârpi definitiv oamenii de treabă din lume! De altfel, dacă elementele de treabă ar fi distruse cu totul, din ce s'ar mai hrăni specia brigandă? Bunul simţ ne previne de rezultatul pe care trebuia să-l dea calculul.

Articolul D-lui *Galvez Laguarta* întră în ordinea de idei inaugurată de *V. Volterra*. Autorul îşi pune problema aşa cum se întâlneşte în biologie, când avem de a face cu specii deosebite compuse din mai mulţi indivizi.

Fie o *rezervă* de M elemente repartizate în m specii, şi anume fie α elemente a, β elemente $b, \ldots,$ λ elemente l. Numărul literelor e m, iar:

$$M = \alpha + \cdots + \lambda.$$

Câte grupe *deosebite* putem forma cu aceste M elemente, dacă le luăm p câte p? Aceste grupe pot conţine fie nici o dată, fie o dată, fie de două ori, ..., fie cel mult de α ori elementul a. Numărul acestor grupe *deosebite* de câte p elemente ce putem face luând pe a cel mult de α ori, pe b cel mult de β ori, etc. se numeşte numărul de *combinări generalizate* a celor M elemente luate câte p. Il notăm cu

$$C^p_{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)}.$$

Dacă $\alpha=\beta=\cdots=\lambda=1$ elementele sunt toate distincte între ele şi regăsim combinările obicinuite:

$$C^p_{(1,1,\ldots,1)} = C^p_m.$$

Dacă $\alpha=\beta=\cdots=\lambda=p$ regăsim combinările cu repetiţie K^p_m:

$$C^p_{(p,p,\ldots,p)} = K^p_m = C^p_{m+p-1}.$$

Exemplu. $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=4$. Avem 9 grupe distincte de câte 3 elemente:

ccc, ccb, cbb, bbb, acc, abc, abb, aab, aac,

adică

$$C^3_{(2,3,4)} = 9.$$

E evident că dacă $p > \alpha+\beta+\cdots+\lambda$, nu putem forma nici o grupă de p elemente cu rezerva dată, deci în acest caz

$$C^p_{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)} = 0.$$

Dacă vreunul din numerele $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ e mai mare ca p, trebue înlocuit cu p. Cu alte cuvinte

$$C^p_{(p+\alpha',\,p+\beta',\,\gamma,\ldots,\lambda)} = C^p_{(p,p,\gamma,\ldots,\lambda)}.$$

In adevăr grupele ce formăm având numai p elemente, nu putem folosi niciodată în acelaş timp toate cele $p+\alpha'$ elemente a; putem folosi *cel mult* p elemente a în acelaş timp, aşa că celelalte α' elemente a suplimentare sunt ca şi inexistente.

Mai observăm că $C^p_{(\alpha)}=1$, dacă $\alpha \geqq p$ şi $C^p_{(\alpha)}=0$, dacă $\alpha < p$

In articolul său, D-l *Laguarta* îndică formulele

$$C^p_{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)} = C^{M-p}_{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)},$$

$$C^p_{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)} = C^p_{(\alpha-1,\,\beta,\ldots,\lambda)} + C^{p-\alpha}_{(\beta,\ldots,\lambda)},$$

care generalizează pe (1). Aceste formule se pot demonstra *direct* şi cea de a doua poate fi generalizată, fie pe cale directă, fie prin aplicarea ei repetată

Pentru precizarea scrisului, vom presupune

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \cdots \leq \lambda \leq p,$$

ceea ce nu restrânge întru nimic generalitatea, căci putem ordona elementele rezervei M în mod arbi-

trar, iar numărul de elemente utilizat din fiecare specie e cel mult p. De asemeni, trebue să presupunem

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda\geq p,$$

căci altfel combinările generalizate se reduc la zero.

Demonstrația directă a primei relații revine la observarea că la fiecare grupă deosebită de p obiecte extrase din rezervă corespunde o grupă deosebită de $M-p$ obiecte rămase în rezervă, și reciproc; de unde egalitatea anunțată.

Demonstrația celei de a doua formule se poate face despărțind cele $C^{p}_{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)}$ grupe în două clase: în prima clasă punem *toate* grupele care conțin pe a la numărul maxim de ori posibil, adică α; în clasa a doua punem toate celelalte grupe. Dacă în grupele din clasa întâia suprimăm factorul comun a^{α}, rămân toate grupele distincte ce se pot face cu literele rămase $b, c, \ldots, l$ luate respectiv de cel mult $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ ori. Iar fiecare grupă are $p-\alpha$ elemente. Deci în clasa întâia sunt $C^{p-\alpha}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}$ grupe. In clasa doua sunt grupe de câte p litere în care a intră cel mult de $\alpha-1$ ori, β de b ori, ... Deci sunt $C^{p}_{(\alpha-1,\beta,\ldots,\lambda)}$ grupe distincte. Reunind aceste două clase, obținem formula a doua a D-lui *Galvez Laguarta*. Demonstrațiile precedente sunt identice cu cele cunoscute pentru combinările simple. Modul de demonstrație poate fi generalizat astfel:

Vom clasifica cele $C^{p}_{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)}$ grupe în $\alpha+1$ clase: 1. clasa întâia cuprinde grupele care nu conțin nici odată elementul a. Evident, sunt $C^{p}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}$ astfel de grupe. 2. În clasa doua punem grupele care conțin *o singură dată* elementul a. Dacă suprimăm din toate grupele acest element comun a, rămân grupe de câte $p-1$ elemente formate din b luat cel mult de β ori, ..., l luat cel mult de λ ori. Cu alte cuvinte, clasa doua conține $C^{p-2}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}$ grupe. 3. Clasa treia va fi formată din cele $C^{p-2}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda}$ grupe care conțin de *două ori* elementul a... In fine $\alpha+1$) clasa $\alpha+1$ conține cele $C^{p-\alpha}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}$ grupe în care a intră de câte α ori. Reunind la un loc aceste clase, obținem relația:

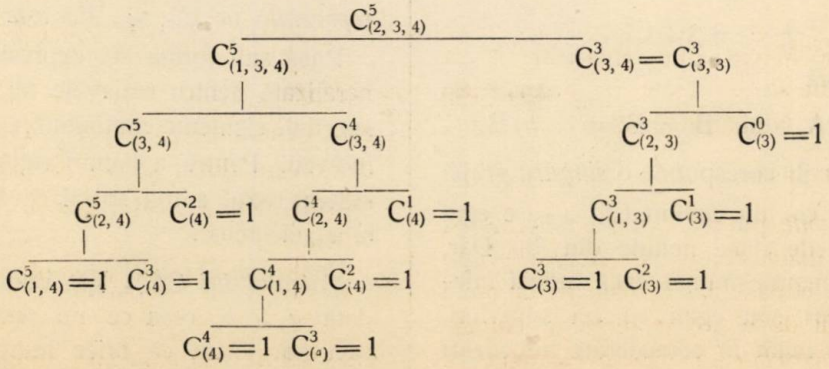
$$(2)\quad C^{p}_{(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}=C^{p}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}+C^{p-1}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}+\cdots$$

$$\cdots+C^{p-\alpha}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}=\sum_{s=p-\alpha}^{p}C^{s}_{(\beta,\gamma,\ldots,\lambda)}.$$

Formula (2) ne va permite să găsim expresia generală a numărului de *combinări generalizate* format cu o rezervă M. Aceasta e problema centrală care ne preocupă. (2) ne arată că expresia generală o vom găsi prim inducție completă. D-l *Galvez Laguarta* a găsit, prin aplicarea „descompunerei polinomice“ formula pentru cazul a două specii

$$C^{p}_{(\alpha,\beta)}=\alpha+\beta-p+1$$

expresie „din fericire mai simplă“ decât în general când „calculul numărului combinatoriu rezultă laborios“. D-l *Laguarta* propune ca acest calcul să se facă cu ajutorul unor *arbori genealogici*, care revin la descompunerea repetată a unei combinări cu ajutorul celor două relații fundamentale enunțate mai sus, până se ajunge la numere egale cu 1. Insumarea lor va da combinarea generalizată căutată. Un exemplu efectiv face să se înțeleagă imediat structura acestui arbore genealogic și deci calculul propus de D-l *Laguarta* pentru calcularea combinărilor generalizate:



De aci rezultă $C^{5}_{(2,3,4)}=11$.

D-l *Laguarta* a dat şi o expresie a lui $C^p_{(a_1,\,a_2,\,a_3)}$.

Arborele genealogic permite calcularea efectivă atunci când $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, p$ sunt numere date, dar nu ne conduce la găsirea expresiei generale a combinărilor generalizate. Pentru a o găsi, să reluăm cazul când rezerva e compusă din două specii: a_1 elemente egale cu A_1 şi a_2 elemente egale cu B_1.

Notaţii. 1. Să însemnăm cu $E_s(k)$ *partea pozitivă* a diferenţei $k-s$. Prin urmare, dacă $k \geqq s$, avem $E_s(k) = s$, iar dacă $k < s$, avem $E_s(k) = 0$.

În cele ce urmează, vom înlocui, pentru simplificarea scrisului, $E_p(k)$ prin $E(k)$.

2. Vom nota cu

$$S_n^{a_1,\,a_2,\,\ldots,\,\alpha_j} F(a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_{n-j})$$

suma tuturor celor C_n^{n-j} termeni ce se obţin prin înlocuirea grupei $a_1, a_2, \ldots, a_{n-j}$ prin celelalte combinări ale literelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ luate câte $n-j$, în funcţiunea F (presupusă simetrică).

3. Vom nota cu K_n^p numărul *combinărilor cu repetiţie* a n obiecte luate câte p. Se ştie că dacă $p > 0$:

$$K_n^p = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{p!} = C^p_{n+p-1}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)\ldots(n+p-1)}{(n-1)!} = C^{n-1}_{n+p-1}.$$

Deci:

$$K_n^p = K_{n-1}^p + K_n^{p-1},$$

ceea ce atrage $K_n^0 = 1$ şi apoi $K_n^{-1} = \cdots K_n^{-p} = 0$.

Calculul lui $C^p_{(a_1,\,a_2)}$. Să reluăm (1 bis) pentru $C^p_{a_1+a_2}$, unde $a_1 + a_2 \geqq p$.

$$(3) \qquad C^p_{a_1+a_2} = C^0_{a_1} C^p_{a_2} + C^1_{a_1} C^{p-1}_{a_2} + C^2_{a_2} C^{p-2}_{a_2} + \cdots + C^p_{a_1} C^0_{a_2}.$$

E evident că dacă

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{a_1} \quad \text{şi} \quad B_1 = B_2 = \ldots = B_{a_2}$$

la fiecare clasă din (3) corespunde o *singură* grupă distinctă în $C^p_{(a_1,\,a_2)}$. Cu alte cuvinte $C^p_{(a_1,\,a_2,\,a_3)}$ e egal cu numărul efectiv de clase nenule din (3). Dar, în (3) avem clase nenule numai dacă indicii inferiori sunt mai mari sau egali cu cei superiori. Aşa dar, trebue să luăm în considerare trei cazuri posibile:

1. $a_1 \leqq p,\ a_2 \leqq p$; 2. $a_1 \geqq p,\ a_2 \leqq p$;

3. $a_1 \geqq p,\ a_2 \geqq p$.

În cazul întâi, primul termen nenul din (3) este $C^{p-a_2}_{a_1} C^{a_2}_{a_2}$ (căci $a_1 \geqq p - a_2$ din cauza ipotezei esenţiale $a_1 + a_2 \geqq p$), iar ultimul termen nenul e $C^{a_1}_{a_1} C^{p-a_1}_{a_2}$. Sunt deci:

$$a_1 - (p - a_2) + 1 = a_1 + a_2 - p + 1 = E(a_1 + a_2) - E(a_1) - E(a_2) + 1$$

clase deosebite nenule în (3). (Căci în acest caz $E(a_1) = E(a_2) = 0$). Cu alte cuvinte, în acest caz:

$$(4) \qquad C^p_{(a_1,\,a_2)} = E(a_1 + a_2) - E(a_1) - E(a_2) + 1 = K_2^{E(a_1+a_2)} - K_2^{E(a_1)-1} - K_2^{E(a_2)-1}.$$

În cazul al doilea, primul termen nenul în (3) este $C^{p-a_2}_{a_1} C^{a_2}_{a_2}$, iar ultimul termen nenul e chiar $C^p_{a_1} C^0_{a_2}$. Deci, în acest caz sunt

$$p - (p - a_2) + 1 = a_2 + 1 = E(a_1 + a_2) - E(a_1) - E(a_2) + 1$$

clase nenule în (3), căci

$$E(a_1 + a_2) = a_1 + a_2 - p;\ E(a_1) = a_1 - p;\ E(a_2) = 0.$$

Deci şi în acest caz numărul $C^p_{(a_1,\,a_2)}$ e dat tot de (4).

În cazul al treilea primul termen nenul în (3) e chiar $C^0_{a_1} C^p_{a_2}$, iar ultimul termen nenul e chiar $C^p_{a_1} C^0_{a_2}$. Sunt deci $p+1$ clasa efectiv nenule. Dar, în acest caz

$$E(a_1+a_2) = a_1+a_2-p;\ E(a_1) = a_1-p;\ E(a_2 = a_2-p,$$

aşa că numărul claselor nenule din (3), este

$$p + 1 = E(a_1 + a_2) - E(a_1) - E(a_2) + 1.$$

Ca atare şi în acest al treilea caz *formula* (4) *reprezintă pe* $C^p_{(a_1,\,a_2)}$. *Ea este deci generală.*

Pusă sub forma (4), expresia $C^p_{(a_1,\,a_2)}$ poate fi generalizată pentru rezervele M compuse din oricâte specii de elemente conţinând respectiv $a_1, a_2, \ldots, a_n$ indivizi. Pentru a lămuri raţionamentul vom considera cazul a trei specii, având respectiv a_1, a_2 şi a_3 elemente.

Calculul lui $C^p_{(a_1,\,a_2,\,a_3)}$. Vom presupune deocamdată $a_1 \leqq p$, ceea ce nu restrânge generalitatea, căci am văzut că orice indice inferior mai mare ca p poate fi înlocuit cu p. In baza lui (2), avem:

$$C^{p}_{(a_1, a_2, a_3)} = C^{p}_{(a_2, a_3)} + C^{p-1}_{(a_2, a_3)} + \cdots$$

$$\cdots + C^{p-a_1}_{(a_2, a_3)} = \sum_{s=p-a_1}^{p} C^{s}_{(a_2, a_3)}.$$

Prin urmare, aplicând formula (4), obținem:

$$C^{p}_{(a_1, a_2, a_3)} = \sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_3+a_3)} - \sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2)-1} - \sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_3)-1}.$$

Trebue să avem, prin ipoteză, $a_1 + a_2 + a_3 \geqq p$, căci altfel combinările generalizate se reduc la 0. Pentru calculul primei Σ din membrul al doilea, avem două cazuri:

1. $a_2 + a_3 > p$; 2. $a_2 + a_3 \leqq p$.

În cazul întâi:

$$\sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2+a_3)} = \sum_{s=p-a_1}^{p} (a_2 + a_3 - s + 1) =$$

$$(a_2 + a_3 - p + 1) + (a_2 + a_3 - p + 2) + \cdots$$

$$\cdots + (a_1 + a_2 + a_3 - p + 1) = 1 + 2 + \cdots$$

$$\cdots + (a_1+a_2+a_3-p+1) - [1 + 2 + \cdots + (a_2+a_3-p)]$$

$$= \frac{[E(a_1 + a_2 + a_3) + 1]\,[E(a_1 + a_2 + a_3) + 2]}{2}$$

$$- \frac{[E(a_2 + a_3)]\,[E(a_2 + a_3) + 1]}{2}$$

$$= K_3^{E(a_1+a_2+a_3)} - K_3^{E(a_2+a_3)} - 1.$$

Prin urmare, în acest caz:

$$(5) \qquad \sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2+a_3)} = K_3^{E(a_1+a_2+a_3)} - K_3^{E(a_2+a_3)-1}.$$

Dacă însă presupunem $a_2 + a_3 \leqq p$, atunci

$$\sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2+a_3)} = 1 + 2 + \cdots + (a_1+a_2+a_3-p+1) =$$

$$\frac{[E(a_1 + a_2 + a_3) + 1]\,[E(a_1 + a_2 + a_3) + 2]}{2} =$$

$$K_3^{E(a_1+a_2+a_3)}.$$

Dar în acest caz

$$E(a_2 + a_3) = 0 \quad \text{şi} \quad K_3^{E(a_2+a_3)-1} = 0,$$

ceea ce arată că şi în acest caz formula (5) este valabilă.

Pentru calculul lui

$$\sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2)-1},$$

avem trei cazuri posibile:

1. $a_2 > p$; 2. $a_2 \leqq p$, $a_1 + a_2 > p$; 3. $a_1 + a_2 \leqq p$.

In cazul întâi:

$$\sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2)-1} = (a_2 - p) + (a_2 - p + 1) + \cdots + (a_1 + a_2 - p)$$

$$= \frac{(a_1+a_2-p)(a_1+a_2-p+1)}{2} - \frac{(a_2-p-1)(a_2-p)}{2}$$

$$= K_3^{E(a_1+a_2)-1} - K_3^{E(a_2)-2}.$$

Aşa dar, în acest caz avem:

$$(6) \qquad \sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2)-1} = K_3^{E(a_1+a_2)-1} - K_3^{E(a_2)-2}.$$

In cazul al doilea $a_2 \leqq p$, $a_1 + a_2 > p$, avem:

$$\sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2)-1} = 1 + 2 + \cdots + (a_1 + a_2 - p) =$$

$$K_3^{E(a_1+a_2)-1}.$$

Dar acum

$$E(a_2) = 0 \quad \text{şi deci} \quad K_3^{E(a_2)-2} = 0,$$

aşa că formula (6) rămâne valabilă.

În fine, dacă $a_1 + a_2 \leqq p$, toţi termenii din suma

$$\sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_2)-1}$$

sunt nuli. Dar atunci şi termenii din membrul al doilea din (6) sunt nuli, aşa că formula (6) este valabilă în general.

În mod analog avem în orice caz:

$$(7) \qquad \sum_{s=p-a_1}^{p} K_2^{E_s(a_3)-1} = K_3^{E(a_1+a_3)-1} - K_3^{E(a_3)-2}.$$

Ţinând seama de (5), (6), (7) şi de faptul că prin ipoteză $E(a_1) = 0$, rezultă formula generală:

$$(8) \qquad C^{p}_{(a_1, a_2, a_3)} = K_3^{(a_1+a_2+a_3)} - K_3^{E(a_2+a_3)-1} -$$

$$K_3^{E(a_1+a_3)-1} - K_3^{E(a_1+a_2)-1} + K_3^{E(a_1)-2} +$$

$$K_3^{E(a_2)-2} + K_3^{E(a_3)-2}.$$

Dacă întroducem notaţia S explicată mai sus, putem scrie:

(9) $C^{p}_{(a_1,\ a_2,\ a_3)} = K_3^{E(a_1+a_2+a_3)} - S_3^{a_1} K_3^{E(a_1+a_2)-1} + S_3^{a_1, a_2} E_3^{E(a_1)-2}$.

Exemple.

$$C^{6}_{(3,\ 4,\ 5)} = \frac{7.8}{2} - \frac{3.4}{2} - \frac{2.3}{2} - \frac{1.2}{2} = 18.$$

Numărul calculat mai sus prin arborele genealogic devine imediat:

$$C^{5}_{(2,\ 3,\ 4)} = \frac{5.6}{1.2} - \frac{1.2}{1.2} - \frac{2\,3}{1.2} = 11.$$

În fine când $a_1 = a_2 = a_3 = p$ regăsim combinările cu repetiție:

$$C^{p}_{(p,\ p,\ p)} = K_3^{2p} - 3K_3^{p-1} = \frac{(2p+1)(2p+2}{2} - \frac{3p(p+1)}{2} = K_3^{p}.$$

Caz special. Dacă presupunem *in particular* că:

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq p\,; \qquad a_2 + a_3 \leqq p$$

termenii de sub semnele S devin nuli și, *in acest caz* avem expresia mai simplă:

(10) $$C^{p}_{(a_1,\ a_2,\ a_3)} = K_3^{E(a_1+a_2+a_3)} = \frac{(a_1+a_2+a_3-p+1)(a_1+a_2+a_3-p+2)}{2}.$$

Exemplu:

$$C^{10}_{(3,\ 4,\ 5)} = \frac{3.4}{2} = 6.$$

Formula (8) este valabilă și dacă toate cantitățile a_1, a_2, a_3 sunt mai mari ca p, așa că restricția $a_1 \leqq p$ nu era necesară decât pentru simplificarea scrisului. În adevăr, dacă $a_1 > p$, avem succesiv:

$$C^{p}_{(a_1,\ a_2,\ a_3)} = \sum_{s=0}^{p} C^{s}_{(a_2,\ a_3)} = \sum_{s=0}^{p} [E_s(a_2+a_3) - E_s(a_2) - E_s(a_3) + 1] =$$

$$[(a_2+a_3-p)+\cdots+(a_2+a_3)] - [(a_2-p)+\cdots+a_2] - [(a_3-p)+\cdots+a_3] + p + 1 =$$

$$[1+2+\cdots+(a_1+a_2+a_3-p+1)] - [1+2+\cdots+(a_2+a_3-p-1)] -$$

$$[(a_2+a_3+1)+\cdots+(a_1+a_2+a_3-p+1)] - [1+2+\cdots+(a_1+a_2-p)] + [1+2+\cdots+(a_2-p-1)]$$

$$+ [(a_2+1)+\cdots+(a_1+a_2-p)] - [1+2+\cdots+(a_1+a_3-p)] +$$

$$[1+2+\cdots+(a_3-p-1)] + [(a_3+1)+\cdots+(a_1+a_3-p)] + p + 1 =$$

$$\frac{[E(a_1+a_2+a_3)+1][E(a_1+a_2+a_3)+2]}{2} - \frac{E(a_2+a_3)[E(a_2+a_3)+1]}{2} +$$

$$(a_2+a_3-p) - (a_2+a_3)(a_1-p+1) - \frac{[E(a_1)-1]E(a_1)}{2} - 2a_1 + 2p - 1 -$$

$$\frac{[E(a_1+a_2)][E(a_1+a_2)+1]}{2} + \frac{[E(a_2)-1]E(a_2)}{2} + a_2(a_1-p) + \frac{E(a_1)[E(a_1)+1]}{2} -$$

$$\frac{E(a_1+a_3)[E(a_1+a_3)+1]}{2} + \frac{[E(a_3)-1]E(a_3)}{2} + a_3(a_1-p) + \frac{E(a_1)[E(a_1)+1]}{2} + p + 1.$$

Avem însă:

$$-\frac{[E(a_1)-1]E(a_1)}{2} + 2\frac{E(a_1)[E(a_1)+1]}{2} = \frac{[E(a_1)-1]E(a_1)}{2} + 2a_1 - 2p,$$

iar suma termenilor care nu au numitorul 2 în expresia de mai sus e nulă, așa că recădem peste (8). Ca atare formula (8) — și deci (9) — e *generală*, oricum ar fi a_1, a_2, a_3 față de p.

Expresia lui $C^{p}_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$. Expresiile (9) și (10) se pot extinde printr'un calcul absolut analog și prin inducție completă la cazul general. Avem rezultatul:

Fie rezerva M *împărțită în n specii și anume* a_1 *elemente egale cu* A_1, a_2 *egale cu* $A_2, \ldots, a_n$

elemente egale cu A_n. *Numărul de grupe distincte de câte p elemente ce se pot face cu rezerva* M, *este în general:*

$$(11)\quad C^{p}_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = K_n^{E(a_1+a_2+\ldots+a_n)} - S_n^{a_1} K_n^{E(a_1+\ldots a_n-1)-1} + S_n^{a_1, a_2} K_n^{E(a_1+\ldots a_n-2)-2} - \ldots$$

Dacă, în particular, toate sumele formate din câte $n-1$ *cantităţi* a_i *sunt cel mult egale cu p, atunci termenii de sub semnele* S *sunt nuli şi formula* (11) *se reduce la:*

$$(12)\quad C^{p}_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = K_n^{E(a_1+a_2+\ldots+a_n)} = \frac{(a_1+\cdots+a_n-p+1)\cdots(a_1+\cdots+a_n-p+n-1)}{(n-1)!}$$

Pentru demonstraţie se presupune (11) adevărată pentru n şi se deduce că e adevărată şi pentru $(n+1)$. Fiind adevărată pentru $n=2$ şi 3 urmează că formula e generală. În calcule intervine relaţia:

$$1.2\ldots n + 2\,3\ldots(n+1) + \cdots + p(p+1)\ldots(p+n-1) = \frac{p(p+1)\ldots(p+n)}{n+1},$$

care se verifică imediat pentru $p=2$. Dar dacă relaţia e adevărată pentru p, avem:

$$1.2\ldots n + \cdots + p(p+n-1) + (p+1)(p+2)\ldots(p+n) = \frac{p(p+1)\ldots(p+n)}{n+1} + (p+1)(p+2)\ldots(p+n) = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n+1)}{n+1},$$

ceea ce arată că relaţia e adevărată şi pentru $p+1$. Adică, ea e generală.

In baza lui (2), avem:

$$C^{p}_{(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})} = \sum_{s=p-a_{n+1}}^{p} C^{s}_{(a_1, \ldots, a_n)}$$

şi deci, aplicând pe (11) în membrul al doilea, căci am presupus (11) adevărată pentru n specii:

$$C^{p}_{(a_1, \ldots, a_{n+1})} = \sum_{s=p-a_{n+1}}^{p} K_n^{E_s(a_1+\ldots+a_n)} - \sum_{s=p-a_{n+1}}^{p} S_n^{a_1} K_n^{E_s(a_1+\ldots+a_{n-1})-1} + \sum_{s=p-a_{n+1}}^{p} S_n^{a_1, a_2} K_n^{E_s(a_1+\ldots+a_{n-2})-2} - \ldots$$

Calculând fiecare Σ în mod absolut analog ca pentru cazul $C^{p}_{(a_1, a_2, a_3)}$ şi ţinând seama de relaţia indicată mai sus, precum şi de faptul că

$$C_n^j + C_n^{j+1} = C_{n+1}^{j+1},$$

cădem tocmai peste formula (11) aplicată la $n+1$ specii.

In particular, dacă toate sumele a n cantităţi a_i din şirul $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sunt cel mult egale cu p, toţi termenii de sub semnul S devin nuli şi găsim, în general, formula (12).

Exemple. 1.

$$C^{4}_{(1,2,3,3,4)} = K_5^9 - (K_5^7 + K_5^6 + 2K_5^5 + K_5^4) + (K_5^4 + 2K_5^3 + 3K_5^2 + 2K_5^1 + 2K_5^0) - K_5^0 = 48.$$

2. Dacă $a_1 = a_2 = \cdots a_n = p$ obţinem evident combinările cu repetiţie a n obiecte luate câte p, adică $K_n^p = C_{n+p-1}^{n-1}$. Dar, pe de altă parte, aplicând direct formula (11), obţinem o altă expresie. Egalând cele două expresii se ajunge la relaţia:

$$C_{n+p-1}^{n-1} = C_{(n-1)(p+1)}^{n-1} - C_n^1 C_{(n-2)(p+1)}^{n-1} + C_n^2 C_{(n-3)(p+1)}^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-2} C_n^{n-2} C_{p+1}^{n-1}.$$

Această relaţie poate fi demonstrată şi direct. (Cfr. problema propusă în *Gazeta Matematică*, Vol. 46, cu acest subiect).

3. $$C^{2\,3}_{(3,3,4,4,5,6)} = K_6^2 = 21.$$

NOTE MATEMATICE

2. — *Un théorème sur les égalités multigrades.*

L'identité multiple

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \overset{p}{=} b_1, b_2, \ldots, b_n,$$

vraie pour

$$p = 1, 3, \ldots, 2k+1,$$

entraîne la suivante, vraie quelle que soit x (que nous prendrons entier ou rationnel),

$$a_1 - x, a_2 - x, \ldots, a_n - x, a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_n + x \overset{p}{=} b_1 - x, b_2 - x, \ldots, b_n - x, b_1 + x, b_2 + x, \ldots, b_n + x,$$

vraie pour les mêmes valeurs de p.

De même, l'identité multiple

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \overset{p}{=} b_1, b_2, \ldots, b_n,$$

vraie pour $p = 2, 4, \ldots, 2k$,

entraîne, quelle que soit x,

$a_1 - x, a_2 - x, \ldots, a_n - x, a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_n + x \overset{p}{=}$

$b_1 - x, b_2 - x, \ldots, b_n - x, b_1 + x, b_2 + x, \ldots, b_n + x$,

pour les mêmes valeurs de p.

Applications. Par un choix convenable de x on arrive à réduire le nombre de termes qui, par l'application simple du théorème, serait double

α. $\quad 7, 8 \overset{p}{=} 1, 5, 9, \quad p = 1, 3,$

on en déduit, avec $x = 1$

$$7, 9 \overset{p}{=} 2, 4, 10, \quad S_1 = 16, \quad S_3 = 1072.$$

Autre identité:

$$6, 8, 8, 10 \overset{p}{=} 1, 3, 3, 5, 9, 11, \quad S_1 = 32, \quad S_3 = 2240.$$

β. $\quad 24, 33, 51 \overset{p}{=} 7, 13, 38, 50, \quad p = 1, 3, 5.$

prenons $x = \frac{17}{2}$, il vient

$$3, 49, 65, 85, 119 \overset{p}{=} 9, 43, 59, 93, 117,$$

$$S_1 = 321, \quad S_3 = 2.691\,585, \quad S_5 = 29.743.355.841.$$

Autre identité:

$$6, 11, 38, 46, 64 \overset{p}{=} 25, 26, 51, 63,$$

$$S_1 = 175, \quad S_3 = 415.899, \quad S_6 = 1.359.108.795.$$

α'. $\quad 7, 7 \overset{p}{=} 3, 5, 8, \quad p = 2, 4;$

avec $x = 7$, on aura

$$7, 7, 14, 14 \overset{p}{=} 1, 2, 4, 10, 12, 15,$$

$$S_2 = 490, \quad S_4 = 81.634.$$

β'. $\quad 1, 18, 19, 28 \overset{p}{=} 12, 14, 17, 29; \quad x = \frac{11}{2},$

$$9, 25, 27, 49, 67 \overset{p}{=} 17, 23, 35, 39, 69,$$

$$S_2 = 8.325, \quad S_4 = 26.844.549.$$

Avec $x = 8$, on trouve à partir de β'

$$7, 10, 11, 26, 27, 36 \overset{p}{=} 4, 6, 21, 22, 25, 37;$$

$$S_2 = 2.971, \quad S_4 = 2.695.075.$$

$x = \frac{1}{2}$,

$$1, 3, 37, 37, 39, 55 \overset{p}{=} 23, 25, 27, 29, 33, 59,$$

$$S_2 = 7.294, \quad S_3 = 15.212.470.$$

Autre identité

$$1, 3, 9, 37, 37, 49, 55, 67 \overset{p}{=} 17, 23, 23, 29, 33, 35, 59, 69$$

$$S_2 = 12.744, \quad S_4 = 38.821.512.$$

γ'. $\quad 5, 14, 23, 24 \overset{p}{=} 2, 16, 21, 25, \quad p = 2, 4, 6.$

$x = 1,$

$$4, 6, 13, 23, 25 \overset{p}{=} 1, 3, 17, 20, 26.$$

$$S_2 = 1.375, \quad S_4 = 700.579, \quad S_6 = 397.054.075.$$

δ'. $\quad 18, 20, 41, 49 \overset{p}{=} 7, 31, 36, 50, \quad p = 2, 4, 6,$

$x = \frac{11}{2}$,

$$29, 47, 71, 87, 93, 109 \overset{h}{=} 3, 61, 73, 83, 89, 111,$$

$$S_2 = 36.190, \quad S_4 = 304.251.766,$$

$$S_6 = 2.897.190.817\,870.$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

3. — *Asupra problemei de la N-rul 168 din* **„Trigonometria patratică“.**

O altă soluție mult mai simplă și cu totul diferită de cea dată vom expune acum, folosind cunoștințele din articolul „Un nou capitol de *Geometrie Analitică*“ [1]. Problema este următoarea:

Se cere configurația care parametric are ecuațiile

$$\begin{cases} 3x = \Delta\, cp\, \omega \\ 3x = \Delta\, sp\, \omega, \end{cases} \quad \text{unde} \quad \Delta = x + 2y + 1.$$

Soluție. Inlocuind Δ cu valoarea sa, deducem,

$$\begin{cases} (3 - cp\,\omega)x - 2\, cp\,\alpha \;.\; y = cp\,\omega \\ sp\,\omega\,.\,x + (2\, sp\,\omega - 3)y = -\, sp\,\omega, \end{cases}$$

de unde deducem cu ușurință:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-\, cp\,\omega}{2\, sp\,\omega + cp\,\omega - 3} \\ y = \dfrac{-\, sp\,\omega}{2\, sp\,\omega + cp\,\omega - 3}. \end{cases}$$

Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ obținem din (1), pe rând, coordonatele a patru puncte, B, A, B_1, A_1, notate ca în fig. 40 din „T. P.“, p. 184, având coordonatele:

$$B\left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad A(0, 1), \quad B_1\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \quad A_1\left(0, -\frac{1}{5}\right).$$

[1] „R. M. T“, Anul XXI, n-rile 11 și 12, 1941.

De altă parte ecuația

$$(2) \qquad 2\,sp\,\omega + cp\,\omega - 3 = 0,$$

comparată cu (2) din articolul citat, ne dă,

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = -\frac{3}{2}.$$

Vedem aci că β este în afara intervalelor

$$(1,\ \alpha), \qquad (-1,\ \alpha),$$

deci conform concluziilor din articolul citat p. 132, ecuația (2) n'are rădăcini în nici unul din cadrane

Din aceste rezultate relative la sistemul (1), constatăm că sunt împlinite condițiile din A., a menționatului articol p. 147, astfel că putem formula următorul răspuns:

Configurația reprezentată de sistemul parametric dat, este patrulaterul rectiliniu $B A B_1 A_1$, (fig. 40, din articolul menționat).

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* Anul XLVI, No. 7, Martie 1941. Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plautius Andronescu.* Soluția și generalizarea problemei 1876, de *Tiberiu Popoviciu.* Raport asupra lucrării D-lui Prof. *Ion Ionescu* „Maxime și minime geometrice, de *Delegația Societății.* Raportul comisiunii pentru premiul de aritmetică. Concursul „Gazetei Matematice". Note matematice, probleme rezolvate și propuse

2. *Annales Scientifiques de L'Uniyersité de Iassy,* T. XXVI, anul 1940, fasc. 2. Cuprinde între altele și următoarele articole de matematici: Sulle superficie di *Veronese,* di *C. P. Bogdan.* Une surface remarquable engendrée par la tractrice, par *A. Myller.* Sur une nouvelle loi newtonienne, par *I. Placinteanu* et *L. Nadolschi.* Recherches sur les logiques non-chrysippiennes, par *Moisil Gr. C.* Sur la valeur réelle de la mesure d'une grandeur, par *E. E. Stihi.* Sur les congruences de droites, par *O. Mayer*

3. *Disquisitiones Mathematicae et Physicae,* T. I, Fasc. 2 1941. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur, par *Tiberiu Popoviciu.* Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmonique, par *Miron Nicolesco.* Remarques sur mon mémoire: Recherches sur les fonctions polyharmoniques, par *Miron Nicolesco.* Sur les espaces métriques non holonomes complémentaires, par *K. Yano* et *St. Petrescu.* Sur le mouvement tautochrone plan, par *Michel Ghermănescu.* Réflexion des ondes électromagnétiques par des milieux aux constantes optiques variables d'une façon continue, par *Constantin Mihu.*

4 *Boletin Matematico,* Anul XIII, 1940, Buenos Aires. S'au primit numerile de la 7 Iunie 1940. până la n-rul 20 Decemvrie 1940, inclusiv. Se găsesc multe articole și biografii interesante, ultimul număr cuprinzând tabla de materii.

Credem că și abonații la aceasta interesantă Revistă, anunțati în penultima pagină să fi primit, sau vor primi curând aceste numere restante din anul XIII, 1940.

Cu luna Martie 1941, începe anul al XIV al Revistei „Boletin Matematico".

5. *Pozitiva,* Anul I, N-rile 6–7, Martie 1941. O problemă elementară de închidere în legătură cu cercurile osculatoare la o elipsă, de *Miron Nicolescu.* Asupra unei quartice remarcabile a triunghiului, de *E. Arghiriade.* Construcția razei de curbură la o clasă de curbe plane, de *A. Gheorghiu.* Triunghiuri aritmetice pentru puteri asemenea consecutive, de *E. Vișa.* Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

6. *Georges Calugareanu.* Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un cercle. (Mathematica, vol. VI, p. 75–79, 1932).

7. *Georges Calugareanu.* Sur la représentation intrinsèque des surfaces (Mathematica. vol. X, p. 92–98, 1934).

8. *Georges Calugareanu.* Sur certains invariants attachés aux fonctions analytiques. (Mathematica, vol. XII, p. 164–179, 1936).

9. *Georges Calugăreanu.* Invarians de prolongement et fonctionnelles analityques. (Mathematica, vol. XV, p. 61–80, 1939).

10. *Georges Calugareanu.* Les fonctions analytiques régulières à l'infini et leurs invariants de prolongement. (Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, T. 41, Bucarest, 1939).

11. *Georges Calugareanu.* Memoriu de titluri și lucrări.

12. *Căpitan I. Gh. Zamfirescu.* Proectile și țevi centrifugate. (Extras din Revista Artileriei No. 10, 1940).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1732. — *Să se rezolve în numere întregi sistemul:*

$$\begin{cases} x + a y = u^2 \\ x^2 + b x y + a y^2 = v^2, \end{cases}$$

a, b fiind numere întregi.

A. GLODEN

Soluția autorului. A 2-a ecuație este satisfăcută în numere întregi, dacă luăm

$$(1) \qquad x = m^2 - a n^2, \qquad y = 2 m n + b n^2,$$
$$v = m^2 + b m n + a n^2.$$

In virtutea acestor valori prima ecuație a sistemului devine,

$$x + a y = m^2 - a n^2 + 2 a m n + a b n^2 = u^2,$$

sau,

$$m^2 + 2 a m n + a(b-1) n^2 = u^2.$$

Această ecuație la rândul ei este satisfăcută în numere întregi, dacă luăm

$$(2) \qquad \begin{cases} m = p^2 - a(b-1) q^2 \\ n = 2 p q + 2 a q^2 \\ u = p^2 + 2 a p q + a(b-1) q^2. \end{cases}$$

Sistemul dat rezolvat în numere întregi, are soluţiile din (1), unde m, n, u au valorile date de relaţiile (2), p, q, fiind întregi oarecare.

Exemplu numeric:

Pentru,

$$a=2, \quad b=3, \quad p=3, \quad q=1,$$

din (2) rezultă

$$m=5, \quad n=10, \quad u=25,$$

şi apoi din (1) deducem

$$x=-175, \quad y=400, \quad v=375.$$

Avem astfel

$$\begin{cases} (-175)+2\,.\,400=25^2 \\ (-175)^2+3(-175)\,.\,400+2\,.\,400^2=375^2. \end{cases}$$

Problema 1818. — *Să se stabilească inegalităţile:*

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 2c(a-b)+2ab$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqq 2a(b+c+d)-2(bc+bd+cd),$$

a, b, c, d fiind numere reale.

LT. C. D IONESCU-ŢIU

Soluţie. Pornim de la inegalităţile evidente

$$(a-b-c)^2 \geqq 0$$

$$(a-b-c-d)^2 \geqq 0,$$

când a, b, c, d sunt numere reale.

Dezvoltând aceste inegalităţi, putem scri:

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 2ab+2ac-2bc$$

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 2ab+2ac+2ad-2bc-2bd-2cd,$$

sau încă,

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 2c(a-b)+2ab$$

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 2a(b+c+d)-2(bc+bd+cd)$$

Inegalităţile cerute sunt astfel stabilite.

Semnele de egalitate au loc respectiv pentru,

$$a=b+c \quad \text{şi} \quad a=b+c+d.$$

Soluţii date de d-nii: *Aldea V. Virgil* (lic. Milit, N Filipescu), *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Cristea Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Logofătu M. Ion* (lic. Beiuş), *Luca I. Ioan* (lic. Arad), *Negrea Mircea* (Brăila), *Tica P. Marin-Gal*, *Venter D-tru şi Vostinariu Gheorghe* (bacalaureat).

Problema 1819. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=a \\ (x^3+1)(y^3+1)=b. \end{cases}$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Soluţie. Efectuând înmulţirile avem

$$\begin{cases} x+y+xy=a-1 \\ x^3+y^3+x^3y^3=b-1, \end{cases}$$

sau

$$(1) \quad \begin{cases} x+y+xy=a-1 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)+x^3y^3=b-1. \end{cases}$$

Notând,

$$(2) \quad \begin{cases} x+y=u \\ xy=v, \end{cases}$$

sistemul (1) devine

$$\begin{cases} u+v=a-1 \\ u^3+v^3-3uv=b-1. \end{cases}$$

Ridicând prima ecuaţie la puterea a 3-a şi scăzând pe a 2-a, obţinem

$$3uv(u+v)+3uv=(a-1)^3-b+1.$$

Această ecuaţie în virtutea primei ecuaţii din (3) se poate scri,

$$3auv=(a-1)^3-b+1,$$

deci:

$$uv=\frac{(a-1)^3-b+1}{3a}=A.$$

Sistemul (3) este astfel echivalent cu următorul

$$(4) \quad \begin{cases} u+v=a-1 \\ v=uA. \end{cases}$$

u şi v sunt astfel rădăcinele ecuaţiei de gradul al 2-lea,

$$t^2-(a-1)t+A=0.$$

Insemnând cu α şi β rădăcinele acestei ecuaţii, rezultă că sistemul (4) admite următoarele sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} u=\alpha \\ v=\beta, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} u=\beta, \\ v=\alpha. \end{cases}$$

Prin urmare sistemul (2), deci cel dat este echivalent cu următoarele sisteme de ecuaţii:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x+y=\beta \\ xy=\alpha. \end{cases}$$

Urmează de aci că, x, y sunt soluţiile ecuaţiilor de gradul al 2-lea,

$z^2 - \alpha z + \beta = 0$ şi $z^2 - \beta z + \alpha = 0$,

de unde deducem:

$$x, y = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2} \quad \text{şi} \quad x, y = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha}}{2}.$$

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara) şi *Bârlea-Suhăţeanu G. Victor* (lic. Milt. N. Filipescu).

Problema 1827. — *Să se găsească patratul perfect de forma a b c d, în care c, d, b formează o progresie aritmetică cu raţia pozitivă, iar* $c^2 = b$.

C. V. AMAN

Soluţie. Relaţia $c^2 = b$, ne impune să luăm

$c=0, b=0$; $c=b=1$; $c=2, b=4$; $c=3, b=9$.

Dat fiind că cifrele c, d, b formează o progresie aritmetică, nu putem avea $c = b$, deci rămâne să luăm

(1) $c = 2, \ b = 4$; sau $c = 3, \ b = 9$.

Cum d este termenul de la mijlocul progresiei aritmetice, c, d, b, avem

$$d = \frac{c + b}{2},$$

deci corespunzător celor două cazuri din (1) rezultă,

$d = 3$, sau $d = 6$.

Patratul cerut $a\,b\,c\,d$ poate fi astfel de forma

$a\,4\,2\,3$, sau $a\,9\,3\,6$.

Ultima cifră a unui patrat perfect ne putând fi 3, rămâne că patratul cerut este numai de forma

$a\,9\,3\,6$.

Dând cifrei a toate valorile de la 1 la 9 inclusiv, găsim că numai 1936 este patrat perfect,

$$1936 = 44^2,$$

deci singura soluţie a problemei este 1936.

Soluţii date de d-rele: *Checian N. Ana* (studentă, Timişoara), *Papadopol-Demetra Elena* (Bacău), *Mang Ileana* (studentă Timişoara) şi de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Boleanţu Lazăr* (lic. Loga, Timişoara), *Cristea I. Nicolae* (Şc. Polit, Timişoara), *Facsko I. Gheorghe* (lic. Loga, Timişoara), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Luca I. I.* (lic. Arad), *Lupescu Corneliu* (Sbt., Roman), *Radoslav I.*, şi *Văduva F. Marin* (Şc. Polit., Bucureşti).

Problema 1837. — *Să se arate că:*

$$\lim_{x=0} \cdot \frac{2p^2 \sin^2 x \sin(2p+1)x + 2p \sin x \cos 2px - \sin 2px \cos x}{4 \sin^3 x} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

MARIA NEUMANN

Soluţie. Dacă considerăm relaţiile cunoscute,

$$\cos 2px = \cos^{2p} x - C_{2p}^2 \cos^{2p-2} x \sin^2 x + C_{2p}^4 \cos^{2p-4} x \sin^4 x - \cdots$$

$$\sin 2px = C_{2p}^1 \cos^{2p-1} x \sin x - C_{2p}^3 \cos^{2p-3} x \sin^3 x + C_{2p}^5 \cos^{2p-5} x \sin^5 x - \cdots,$$

înmulţim prima relaţie cu $2p \sin x$ şi a 2-a cu $\cos x$ şi le scădem, obţinem:

$$2p \sin x \cos 2px - \sin 2px \cos x = \sin^3 x \left[\left(- C_{2p}^2 \cos^{2p-2} x + C_{2p}^4 \cos^{2p-4} x \sin x - \cdots \right) 2p - \right.$$

$$\left. \left(- C_{2p}^3 \cos^{2p-2} x + C_{2p}^5 \cos^{2p-4} x \sin^2 x - \cdots \right) \right].$$

In virtutea acestei relaţii, primul membru din enunţ notat cu E se poate scri succesiv,

$$E = \frac{p^2}{2} \lim_{x=0} \frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}$$

$$+ \lim_{x=0} \cdot \frac{-\frac{4p^2(2p-1)}{2} \cos^{2p-2} x + 2p \cdot C_{2p}^4 \cos^{2p-4} \sin x - \cdots + \frac{2p(2p-1)(2p-2)}{6} \cos^{2p-2} x - C_{2p}^5 \cos^{2p-4} x \sin^2 + \cdots}{4}$$

$$= \frac{p^2(2p+1)}{2} - \frac{p^2(2p-1)}{2} + \frac{p(2p-1)(p-1)}{6} = \frac{p^2(2p+1)}{2} + \frac{p(2p-1)(p-1-3p)}{6}$$

$$= \frac{p^2(2p+1)}{2} - \frac{p(2p-1)(2p+1)}{6} = \frac{p(2p+1)(3p-2p+1)}{6} = \frac{p(2p+1)(p+1)}{6},$$

fiindcă

$$\lim_{x=0} \frac{\sin(2p+1)x}{\sin x} = (2p+1) \lim_{x=0} \cdot \frac{\dfrac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)x}}{\dfrac{\sin x}{x}} = 2p+1.$$

Relaţia dată este astfel stabilită.

Soluţie analoagă dată de d-l prof. *Negrea Mircea* (Brăila). — Alte soluţii mai lungi, aplicându-se de 3 ori regula lui *Hôspital*, au fost date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, (Timişoara) şi *Cristea Nicolae* (Şc. Polit, Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

1931. — Să se găsească patratele perfecte de forma $abcde$ şi $edcba$ ştiind că,

$$a+b=d+e=c,$$

şi $a+b+c+d+e$ este un patrat perfect.

SUB LT. GH. PITULESCU

1932 — Să se rezolve ecuţia:

$$(2x^3+x-2)^4+x^4=2(x^2+x-1)^4+2x^3(x^2-1)^4.$$

G-L GH. BUICLIU

1933. — Fie

$$A=\cos 2a+i\sin 2a, \quad B=\cos 2b+i\sin 2b,$$

$$C=\cos 2c+i\sin 2c, \quad (i=\sqrt{-1}).$$

Să se arate că avem:

$$\sum \frac{(A+B)(B+C)}{(A-B)(B-C)} = -1.$$

Să se deducă de aci că, aceiaşi relaţie există şi între A_1, B_1, C_1, dacă

$$A_1=\cos 2a-i\sin 2a, \quad B_1=\cos 2b-i\sin 2b,$$

$$C_1=\cos 2c-i\sin 2c, \quad (i=\sqrt{-1}).$$

C. BAKONYI

1934. — Să se arate că între unghiurile unui triunghiu A B C există relaţia:

$$\Sigma \sin 2A(\cos^2 B+\cos^2 C)=2\sin A\sin B\sin C.$$

MINEA V. ALDEA

1935. — Să se stabilească identităţile,

$$\begin{cases} cp\,2x = \dfrac{\sqrt{2}\sin^2(45^0+x)(cp\,x-sp\,x)}{\sin(45^0+2x)} \\ sp\,2x = \dfrac{2\sqrt{2}\sin^2(45^0+x)\,sp\,x\,cp\,x}{\sin(45^0+2x)}, \end{cases}$$

în ipoteza $0 \leq x \leq 45^0$, $cp\,\alpha$ şi $sp\,\alpha$ înseamnă cosinusul şi sinusul patratic de α.

Care sunt identităţile corespunzătoare în cazul $45^0 \leq x \leq 90^0$?

V. ALACI

1936. — Să se demonstreze că, într'un triunghiu A B C, notaţiile fiind cele obicinuite, avem relaţia

$$Cp\frac{A}{2}\,Cp\frac{B}{2}\,Cp\frac{C}{2} - 2\left(Cp\frac{A}{2}+Cp\frac{B}{2}+Cp\frac{C}{2}\right) = \frac{4R}{r}-4,$$

unde $Cp\,\alpha$ înseamnă cosecanta patratică de α.

A. GLODEN

1937. — Pe un fluviu sunt două porturi A şi B, B este în aval de A Simultan pleacă două nave M şi N, nava M pleacă din A către B, nava N pleacă din B către A.

După întâlnire M mai parcurge 5^h, iar N 20^h. După un timp cele două nave pleacă din nou în sens invers. După întâlnire M mai parcurge 12^h 30 m, iar N 8^h. Distanţa între cele două puncte de întâlnire este 20 mile.

Se cere:

1. Viteza navelor în mile pe oră (noduri).
2. Viteza curentului în noduri
3. Distanţa între cele două porturi.

CPT. C. COSTACHESCU

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié: 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'au primit la Redacția „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanța.
2. *Prof. Constantin Borș.* Str. Petru Rareș 85, Piatra Neamț.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licențiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, București II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamț.
5. *Stelian Cetățeanu,* Calea Serban-Vodă 108, București.
6. *Petre Sergescu,* profesor Universitar, Str. Ghica-Vodă 12, Craiova.
7. *Corneliu N. Popescu,* profesor de matematici, Str. Piscului 6, București 6.

Toți d-nii abonați de mai sus, vor primi toate numerile din urmă, când timpul va permite expedierea lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIX, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Legându-se colecția R. M. T., anul XIX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 12 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

ANUL XXI. MAIU 1941 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. V. IONESCU:** GENERALIZAREA UNEI TEOREME A LUI MAURICE D'OCAGNE.
2. **N. GHIRCOIASIU:** ASUPRA REZOLVARII PE CALE TRIGONOMETRICA A ECUATIILOR ALGEBRICE.
3. **ANDREI DOBRESCU:** O FAMILIE DE TRANSVERSALE.
4. NOTE MATEMATICE: 4, 5.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 390, 1804, 1810, 1815.
7. PROBLEME PROPUSE: 1938-1945.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institutul de Arte grafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XXI — No. 3 TIMISOARA, MAIU 1941

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

GENERALIZAREA UNEI TEOREME A LUI MAURICE D'OCAGNE

DE

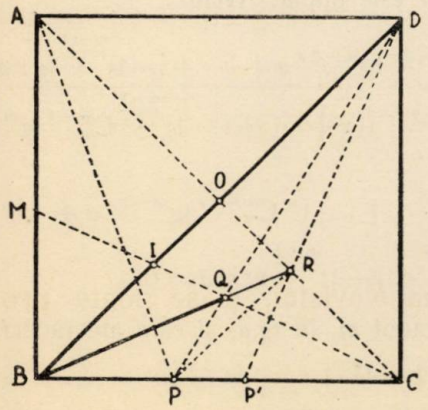
D. V. IONESCU
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE

1. *Maurice d'Ocagne* a stabilit următoarea teoremă de geometrie [1]):

Fie M mijlocul laturei AB a patratului ABCD. Dacă prin vârful D se duce o dreaptă oarecare, ce întâlnește latura BC în P și dreapta CM în Q, atunci unghiurile BAP și DBQ sunt egale.

Iată o demonstație a acestei teoreme din care va rezulta o generalizare interesantă.

a. Fie R intersecția lui BQ cu AC, I intersecția lui CM cu BD și P′ intersecția lui DR cu BC. Punctele B, I, O, D formează o diviziune armonică deoarece rapoartele $\frac{IB}{IO}, \frac{DB}{DO}$ au valoarea absolută egală cu 2. Se deduce că CM este polara punctului D în raport cu unghiul ACB.



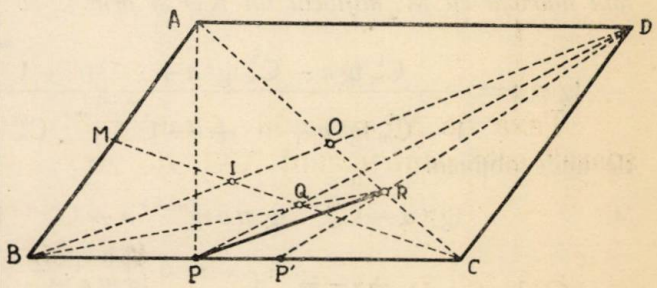
[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909, p. 571. *Maurice d'Ocagne*, geometru francez, născut la Paris la 25 Martie 1862, mort la Havre la 23 Septembrie 1938. A fost profesor la Școala Politechnică din Paris și membru al Academiei de Științe din Paris.

Se știe că dacă prin punctul D se duc dreptele DOB, DRP′, care tae laturile unghiului ACB în O, B, R și P′, atunci dreptele BR, OP′ se întâlnesc pe polara punctului D în raport cu unghiul ACB. Se deduce că punctele Q, O, P′ sunt colineare.

Deoarece în triunghiul P′BD dreapta P′O este mediană, *dreapta* PR *este paralelă cu* BD.

b. Diagonalele într'un patrat fiind perpendiculare, dreapta PR este perpendiculară pe AC. *Patrulaterul* ABPD *este inscriptibil* și prin urmare unghiurile BRP, BAP sunt egale. Unghiurile BRP, DBQ fiind egale se deduce că unghiurile DBQ, BAP sunt egale și teorema este demonstrată.

2. Demonstrația precedentă a fost împărțită în două părți, în partea *a.* s'a demonstrat că dreapta PR este paralelă cu BD, în partea *b.* s'a demonstrat că patrulaterul ABPD este inscriptibil. și din ambele aceste concluzii s'a dedus că unghiurile DBQ, BAP sunt egale.



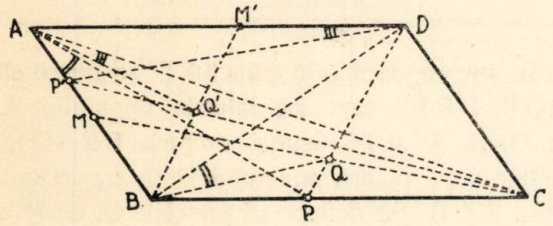
Dacă în loc de patratul ABCD se ia un paralelogram ABCD și se fac construcțiile precedente, păstrându-se toate notațiile, se demonstrează ca la partea *a.* că dreapta PR este paralelă cu BD.

Când patrulaterul ABPR este inscriptibil se va trage concluzia și că în cazul paralelogramului ABCD unghiurile DBQ, BAP sunt egale Aceasta

se întâmplă când unghiurile PRC, ABC sunt egale. Triunghiurile BOC, ABC sunt în acest caz asemenea şi deducem că

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2.$$

Rezultă prin urmare următoarea generalizare a teoremei lui *Maurice d'Ocagne:*



Se consideră paralelogramul ABCD *în care*

(1) $$\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2,$$

şi se notează cu M, *mijlocul laturei* AB *O dreaptă arbitrară dusă prin* D *taie pe* CM *şi pe* CB *în* Q *şi* P *Unghiurile* BAP, DBQ *sunt egale.*

Este evident că condiţiunea (1) este dela sine verificată în cazul patratului.

3. Intr'un paralelogram oarecare avem

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{BC}^2 + 2\overline{AB}^2.$$

Dacă relaţia (1) este satisfăcută, atunci avem şi relaţia

(2) $$\overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2.$$

Rezultă că *dacă în paralelogramul precedent se mai notează cu* M' *mijlocul lui* AD *şi prin* C *se duce o dreaptă oarecare care taie dreptele* BM', BA *în punctele* Q', P', *atunci unghiurile* ADP', CAQ' *sunt egale.*

ASUPRA REZOLVĂRII PE CĂLE TRIGONOMETRICĂ A ECUAŢIILOR ALGEBRICE

DE

N. GHIRCOIAŞIU.

I. Fiind dată ecuaţia

(1) $$x^m + q_1 x^{m-1} + q_2 x^{m-2} + \cdots + q_{2r} x^{m-2r} + q_{2r+1} x^{m-2r-1} + \cdots + q_m = 0$$

vrem să determinăm coeficienţii $q_1, q_2, \ldots, q_m$ astfel ca rădăcinile ei să se poată pune sub forma

(2) $$x = l \operatorname{tg}(\varphi + \frac{k\pi}{n}), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

şi în acest caz să aflăm pe l şi φ.

Pentru aceasta, în (1), facem schimbarea

$$x = l \operatorname{tg} a.$$

Obţinem

(3) $$l^m \operatorname{tg}^m a + q_1 l^{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} a + q_2 l^{m-2} \operatorname{tg}^{m-2} a + \cdots + q_{2r+1} l^{m-2r-1} \operatorname{tg}^{m-2r-1} a + \cdots + q_m = 0.$$

Pe de altă parte, utilizând formula lui *Moivre*, $\operatorname{tg} m\,a$ se poate exprima raţional în functie de $\operatorname{tg} a$.

Deosebim două cazuri:

1. m este impar. Avem

$$\operatorname{tg} m\,a = \frac{C_m^1 \operatorname{tg} a - C_m^3 \operatorname{tg}^3 a + \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}-r} C_m^{m-2r} \operatorname{tg}^{m-2r} a + \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{tg}^m a}{1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2 a + \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}-r} C_m^{m-2r-1} \operatorname{tg}^{m-2r-1} a + \cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} C_m^{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} a}$$

de unde obţinem

(4) $$\operatorname{tg}^m a - C_m^{m-1} \operatorname{tg} m\,a \operatorname{tg}^{m-1} a - C_m^{m-2} \operatorname{tg}^{m-2} a + \cdots + (-1)^r C_m^{m-2r} \operatorname{tg}^{m-2r} a + (-1)^{r+1} C_m^{m-2r-1} \operatorname{tg} m\,a \operatorname{tg}^{m-2r-1} a + \cdots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \operatorname{tg} m\,a = 0.$$

Această identitate poate fi considerată ca o ecuaţie de gradul m, în $\operatorname{tg} a$, şi care are rădăcinile

$$\operatorname{tg}(a + k\pi), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Aşa fiind, scriind că ecuaţiile (3) şi (4) au aceleaşi rădăcini obţinem m relaţii

(5) $$\frac{1}{l^m} = \frac{-C_m^{m-1} \operatorname{tg} m\,a}{l^{m-1} q_1} = \frac{-C_m^{m-2}}{l^{m-2} q_2} = \cdots = \frac{(-1)^r C_m^{m-2r}}{l^{m-2r} q_{2r}} = \frac{(-1)^{r+1} C_m^{m-2r-1} \operatorname{tg} m\,a}{l^{m-2r-1} q_{2r+1}}$$

$$= \cdots = \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} \operatorname{tg} m a}{q_m} .$$

Din primele două egalităţi avem

(6) $$l^2 = -\frac{q^2}{C_m^{m-2}}, \qquad \operatorname{tg} m a = -\frac{q_1}{C_m^{m-1} l}$$

care determină pe l şi a; q_1 şi q_2 fiind daţi. Celelalte $m-2$ ecuaţii din (4) determină coeficienţii $q_3, q_4, \ldots, q_m$ în funcţie de q_1 şi q_2,

(7) $$q_{2r} = C_m^{m-2r}\left[\frac{2 q_2}{m(m-1)}\right]^r, \; r = 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}, \qquad q_{2r+1} = \frac{C_m^{m-2r-1}}{m}\left[\frac{2 q_2}{m(m-1)}\right]^r q_1, \; r = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2} .$$

Rădăcinile ecuaţiei (1) sunt de forma (2), unde

$$\varphi = \frac{1}{m} \operatorname{arctg}\left(-\frac{q_1}{m l}\right) .$$

2. m este par. Avem

(4) $$\operatorname{tg} m a \operatorname{tg}^m a + C_m^{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} a - C_m^{m-2} \operatorname{tg} m a \operatorname{tg}^{m-2} a + \cdots$$

$$+ (-1)^r C_m^{m-2r} \operatorname{tg} m a \operatorname{tg}^{m-2r} a + (-1)^r C_m^{m-2r-1} \operatorname{tg}^{m-2r-1} a + \cdots + (-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{tg} m a = 0.$$

In mod analog ca mai sus găsim

$$l^2 = -\frac{q_2}{C_m^{m-2}}, \qquad \operatorname{tg} m a = \frac{C_m^{m-1} l}{q_1} .$$

Expresia lui l este aceiaşi, iar a lui $\operatorname{tg} m a$ inversă şi de semn contrar.

Coeficienţii

$q_{2r}\left(r = 2, 3, \ldots, \frac{m}{2}\right)$ şi $q_{2r+1}\left(r = 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1\right)$

sunt daţi de aceleaşi formule (7).

Ecuaţia (1) se scrie deci

(8) $$x^m + q_1 x^{m-1} + q_2 x^{m-2} + \frac{m-2}{3m} q_1 q_2 x^{m-3} + \cdots$$

$$\cdots + C_m^{m-2r}\left[\frac{2 q_2}{m(m-1)}\right]^r x^{m-2r} +$$

$$+ \frac{C^{m-2r-1}}{m}\left[\frac{2 q_2}{m(m-1)}\right]^r q_1 x^{m-2r-1} + \cdots = 0,$$

care are rădăcinile

$$x = l \operatorname{tg}\left[\frac{1}{m} \operatorname{arctg}\left(-\frac{q_2}{m l}\right) + \frac{k\pi}{m}\right],$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Observare. D-l Prof. *V. Alaci*[1] găseşte ecuaţia algebrică

(9) $$[(b_1 + a_1 i) x - (b + a i)]^n - [(b_1 - a_1 i) x - (b - a i)]^n = 0),$$

care are rădăcinile

(10) $$x = \frac{a \cos\frac{k\pi}{m} + b \sin\frac{k\pi}{m}}{a_1 \cos\frac{k\pi}{m} + b_1 \sin\frac{k\pi}{m}}, \; k = 0, 1, \ldots, m-1$$

sau

$$x = \frac{a + b \operatorname{tg}\frac{k\pi}{m}}{a_1 + b_1 \operatorname{tg}\frac{k\pi}{m}}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Acestea se pot scrie sub forma (2), punând

$$a = l \operatorname{tg}\varphi, \quad b = l, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = -\operatorname{tg}\varphi$$

în care caz ecuaţia (9) devine, utilizând formulele lui *Euler*,

$$e^{2in\varphi}(i x - l)^n - (-1)^n (i x + l)^n = 0,$$

care este o formă strânsă a ecuaţiei (8).

2. Pentru ca ecuaţia de gradul doi

$$x^2 + p x + q = 0$$

să fie rezolvabilă prin această metodă, şi ca să aibă rădăcinile reale, rezultă din (6) $q < 0$. Condiţia nu este mai restrictivă decât cea cunoscută

[1]) *V. Alaci*, O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice, Revista Matematică din Timişoara t VIII, p. 134, 1928–29.

$p^2 - 4q > 0$, căci dacă $q > 0$ ecuaţia se poate scrie

$$x^2 + px + q = (x + \sqrt{q})^2 + (p - 2\sqrt{q})(x + \sqrt{q}) - (p - 2\sqrt{q})\sqrt{q} = 0,$$

ori de data aceasta termenul liber al nouei ecuaţii în $x + \sqrt{q}$ este o cantitate negativă.

II. Să considerăm ecuaţia

$$x^n + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-4} + \cdots + q_\alpha x^{n-2\alpha} + q_{\alpha+1} = 0, \tag{11}$$

unde α este cel mai mare întreg cuprins în $\frac{n}{2}$, adică $\frac{n}{2}$ sau $\frac{n-1}{2}$ după cum n este par sau impar. Vrem să stabilim în ce caz această ecuaţie are rădăcinile

$$x = l\cos(\varphi + \frac{2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Punând în (11)

$$x = l\cos a \tag{12}$$

obţinem ecuaţia în $\cos a$

$$l^n \cos^n a + q_1 l^{n-2}\cos^{n-2} a + \cdots + q_\alpha l^{n-2\alpha}\cos^{n-2\alpha} a + q_{\alpha+1} = 0. \tag{13}$$

Pe de altă parte putem exprima pe $\cos na$ în funcţie de puterile lui $\cos a$, căci din formula lui *Moivre* deducem

$$\cos na = \cos^n a - C_n^2 \cos^{n-2} a \sin^2 a + C_n^4 \cos^{n-4} a \sin^4 a + \cdots (-1)^p C_n^{2p} \cos^{n-2p} a \sin^{2p} a + \cdots \tag{14}$$

care se poate scrie

$$\cos na = b_0 \cos^n a + b_1 \cos^{n-2} a + \cdots + b_p \cos^{n-2p} a + \cdots \tag{15}$$

unde

$$b_0 = 1 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^{2p} + \cdots = 2^{n-1}.$$

Pentru a determina coeficienţii b_p[1], derivăm de două ori ecuaţia (15) şi o identificăm apoi cu (14), găsim relaţia de recurenţă

$$b_p = -\frac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{4p(n-p)} b_{p-1},$$

de unde

$$b_1 = -2^{n-3} n; \quad b_2 = \frac{n(n-3)}{2!} 2^{n-5}; \ldots$$

$$\ldots; b_p = (-1)^p \frac{n(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{p!} 2^{n-p-1}.$$

Deci

$$\cos na = 2^{n-1}\cos^n a - 2^{n-3} n \cos^{n-2} a + 2^{n-5}\frac{n(n-3)}{2!}\cos^{n-4} a + \cdots + (-1)^p \frac{n(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{p!} 2^{n-2p-1}\cos^{n-2p} a + \cdots \tag{16}$$

coeficientul b_α, al ultimului termen, este respectiv $(-1)^\alpha$ sau $(-1)^\alpha n$ după cum n este par sau impar.

Această identitate poate fi privită ca o ecuaţie de gradul n în $\cos a$, care are evident rădăcinile

$$\cos(a + 2k\pi), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Echivalând ecuaţiile (13) şi (16), găsim

$$\frac{l^n}{2^{n-1}} = \frac{l^{n-2} q_1}{-2^{n-3} n} = \frac{l^{n-4} q_2}{2^{n-5}\frac{n(n-3)}{2!}} = \cdots = \frac{l^{n-2p} q_p}{(-1)^p \frac{n(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{p} 2^{n-2p-1}} = \cdots \tag{17}$$

Ultimile două rapoarte sunt

$$\frac{l^2 q_{\alpha-1}}{(-1)^{\alpha-1} n} = \frac{q_\alpha + q_{\alpha+1}}{(-1)^\alpha - \cos na}, \tag{18}$$

sau

$$\frac{l^2 q_\alpha}{(-1)^{\alpha-1} n} = \frac{q_{\alpha+1}}{-\cos na},$$

după cum n este par sau impar.

Primele două rapoarte din (17) determină pe l, iar (18) ne dau cele n valori ale lui a. Avem astfel toate cele n rădăcini ale ecuaţiei (11).

Restul condiţiilor (17) trebuesc să fie sătisfăcute de coeficienţii ecuaţiei date. Rezultă că aceasta are numai doi coeficienţi arbitrari (în cazul n par $q_\alpha + q_{\alpha+1}$ se poate considera ca un singur coeficient).

Avem astfel

[1]) *Th. Angheluţă*, Curs de Algebră Superioară. Funcţii Analitice, p. 115, Cluj 1940

$$l=\sqrt{-\frac{4q_1}{n}},$$

$$q_p=(-1)^{2p}\frac{4n(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{p!\,n^p}q_1^p$$

şi

$$\cos n\alpha=(-1)^{\alpha}\left[1+\frac{n^2(q_\alpha+q_{\alpha+1})}{4q_1q_{\alpha-1}}\right],$$

sau

$$\cos n\alpha=(-1)^{\alpha-1}\frac{n^2q\alpha+1}{4q_1q_\alpha}$$

după cum n este par sau impar. Deci rădăcinile ecuaţiei (11) sunt de forma

$$x=l\cos(\varphi+\frac{k\pi}{n}),\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Pentru ca rădăcinile ecuaţiei să fie reale trebue ca $q_1<0$ şi $|\cos n\alpha|\leqq 1$.

Exemple. 1. Ecuaţia de gradul doi

$$x^2+ax+b=0$$

se poate scrie

$$y^2+p=0,$$

deci este totdeauna rezolvabilă prin această metodă.

Avem

$$\cos 2\alpha=\frac{l^2-2p}{l^2},\quad \alpha=\frac{1}{2}\arccos\frac{l^2-2p}{l^2}+k\pi,$$

$$k=0,1,$$

l fiind arbitrar. Deci

$$y=l\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{l^2-2p}{l^2}+k\pi\right],\quad k=0,1.$$

2. Ecuaţia generală de gradul trei este rezolvabilă pe această cale, căci ea se poate scrie

$$x^3+px+q=0.$$

Găsim

$$l=\sqrt{-\frac{p}{3}},\qquad \cos 3\alpha=\frac{3q}{lp}.$$

Rădăcinile sunt atunci

$$x=l\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\frac{3q}{lp}+\frac{2k\pi}{3}\right],\quad k=0,1,2$$

Pentru ca ele să fie reale trebue

$$p<0\qquad\text{şi}\qquad|\cos 3\alpha|=\left|\frac{3q}{lp}\right|\leqq 1.$$

Ultima se mai poate scrie, ridicând la patrat,

$$4p^3+27q^2\leqq 0$$

condiţie cunoscută.

3. Ecuaţia bipatrată

$$x^4+px^2+q=0$$

este deasemenea rezolvabilă în totdeauna pe această cale.

Pentru ca ea să aibă toate rădăcinile reale, găsim că trebue

$$p<0\qquad\text{şi}\qquad q(p^2-4q)>0.$$

Din a doua condiţie rezultă $q>0$, $p^2-4q>0$, căci dacă $q>0$, p^2-4q nu poate fi negativ, fiind suma a două cantităţi pozitive.

4. Pentru ecuaţia [1]

$$x^6-6x^4+9x^2-4=0,$$

găsim

$$l=\pm 2,\quad \cos 6\alpha=1,\quad \alpha=\frac{k\pi}{3},\ k=0,1,\ldots,5.$$

Luând $l=2$, avem rădăcinile

$$x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=2,\ x_5=-1,\ x_6=1.$$

Pentru $l=-2$, găsim aceleaşi valori.

Observare. D-l Prof. *V. Alaci* [2] găseşte ecuaţia algebrică

$$(19)\quad (x\mp\sqrt{x^2-a^2-b^2})^{2n}-(a-bi)^{2n}=0,$$

cu rădăcinile

$$x=a\cos\frac{k\pi}{n}+b\sin\frac{k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ldots,\ 2n-1.$$

Punând $\frac{a}{b}=\operatorname{cotg}\varphi$, avem

$$x=\frac{b}{\sin\varphi}\cos(\varphi+\frac{k\pi}{n}),\quad k=0,\ 1,\ldots,\ 2-1,$$

de unde rezultă că ecuaţiile (11) şi (19) au aceleaşi rădăcini.

---

[1]) Un alt exemplu a se vedea în Supliment la Culegerea de Exerciţii şi Probleme a D-lui Prof. *Th. Angheluţă*, p. 4

[2]) *V. Alaci*, Una clase de ecuaciones algebricas con raices trigonométricas. Boletin Matematico, An. IX, Nr. 1, p. 5. — O clasă de ecuaţii algebrice cu rădăcini trigonometrice, Revista Matematică din Timişoara, An. VIII, Nr. 9, p. 132.

O FAMILIE DE TRANSVERSALE

DE

PROF. ANDREI DOBRESCU

1. În cele ce urmează vom pune în evidenţă o familie de transversale faţă de un triunghiu.

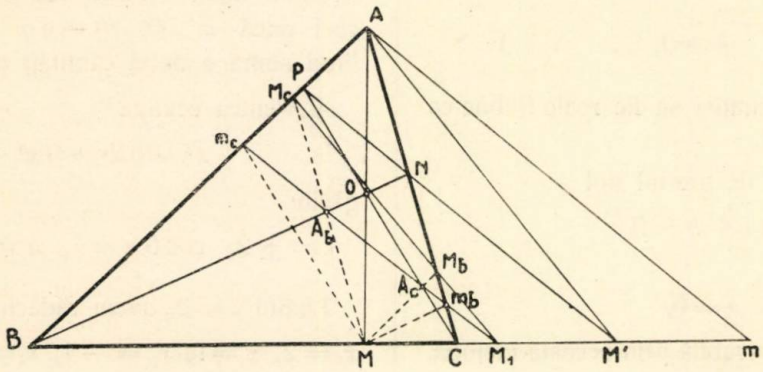
În acest scop, vom stabili întâi proprietatea:

Fie un punct M *pe latura* BC *a triunghiului* ABC, M_1 *punctul de intersecţie al laturii* BC *cu dreapta determinată de punctele în care paralelele din* M *la* AB *şi* AC *întâlnesc aceste laturi,* M_2 *analogul lui* M_1 *(adică punctul care se obţine, plecând dela* M_1, *în acelaşi mod cum* M_1 *a fost obţinut plecând dela* M), M_3 *analogul lui* $M_2, \ldots, M_n$ *analogul lui* $M_{n-1}, \ldots$

Avem relaţiunea:

$$\frac{M_n B}{M_n C} = \left(\frac{M B}{M C}\right)^{2^n}. \tag{1}$$

Demonstrăm proprietatea prin inducţie completă: demonstrăm că este adevărată pentru M_1 $(n = 1)$ şi dacă, presupunând că este adevărată pentru M_{n-1}, dovedim că este adevărată şi pentru M_n, însemnează că proprietatea enunţată este generală.



Să însemnăm cu M_b şi M_c punctele în care paralelele din M la AB şi AC întâlnesc aceste laturi (M_b fiind pe AC şi M_c pe AB).

Punctul M_1 este intersecţia dreptei $M_b M_c$ cu BC.

Potrivit teoremei lui *Menelaus*, putem scrie:

$$\frac{M_1 B}{M_1 C} \cdot \frac{M_b C}{M_b A} \cdot \frac{M_c A}{M_c B} = 1. \tag{2}$$

Observăm că avem şi

$$\frac{M_b C}{M_b A} = \frac{M_c A}{M_c B} = \frac{M C}{M B},$$

astfel că (2) ne dă imediat:

$$\frac{M_1 B}{M_1 C} = \left(\frac{M B}{M C}\right)^2. \tag{3}$$

Presupunem că (1) este adevărată pentru M_{n-1}:

$$\frac{M_{n-1} B}{M_{n-1} C} = \left(\frac{M B}{M C}\right)^{2^{n-1}}. \tag{4}$$

M_n fiind faţă de M_{n-1} ceea ce M_1 este faţă de M, urmează că, potrivit relaţiunilor (3) şi (4),

$$\frac{M_n B}{M_n C} = \left(\frac{M_{n-1} B}{M_{n-1} C}\right)^2 = \left[\left(\frac{M B}{M C}\right)^{2^{n-1}}\right]^2 =$$

$$\left(\frac{M B}{M C}\right)^{2^{n-1} \cdot 2} = \left(\frac{M B}{M C}\right)^{2^n}.$$

Proprietatea enunţată este deci adevărată în general.

2. Să considerăm încă punctele N şi P pe laturile CA şi AB respectiv precum şi punctele N_n şi P_n, analoagele lui M_n.

Avem, evident:

$$\frac{N_n C}{N_n A} = \left(\frac{N C}{N A}\right)^{2^n} \quad \text{şi} \quad \frac{P_n A}{P_n B} = \left(\frac{P A}{P B}\right)^{2^n}.$$

Ţinând de aceste relaţii şi de relaţiunea (1), putem scrie:

$$\frac{M_n B}{M_n C} \cdot \frac{N_n C}{N_n A} \cdot \frac{P_n A}{P_n B} = \left(\frac{M B}{M C} \cdot \frac{N C}{N A} \cdot \frac{P A}{P B}\right)^{2^n}. \tag{5}$$

Această relaţiune evidenţiază faptul că, *dacă punctele* M, N, P *sunt colineare sau sunt picioarele a 3 ceviene concurente, punctele* M_n, N_n, P_n *sunt colineare.*

Indicele n fiind socotit variabil, luând toate valorile întregi şi pozitive începând cu valoarea 1, însemnează că punctele M_n, N_n, P_n definesc o *familie* de transversale faţă de triunghiul A B C.

3. Dacă N_c, N_a şi P_a, P_b sunt analoagele punctelor M_b, M_c, se vede uşor că avem:

$$\frac{M_b C}{M_b A}\cdot\frac{N_c A}{N_c B}\cdot\frac{P_a B}{P_a C}=\frac{M_c A}{M_c B}\cdot\frac{N_a B}{N_a C}\cdot\frac{P_b C}{P_b A}=\frac{MC}{MB}\cdot\frac{NA}{NC}\cdot\frac{PB}{PA},$$

cea ce înseamnă că, dacă punctele M, N, P sunt coliniare, punctele M_b, N_c, P_a şi M_c, N_a, P_b sunt de asemenea colineare, iar dacă punctele M, N, P sunt picioarele a 3 ceviene concurente, acelaşi lucru este adevărat şi despre punctele M_b, N_c, P_a şi M_c, N_a, P_b. Analoagele acestora însă, corespunzătoare punctelor M_n, N_n, P_n, sunt coliniare, astfel că putem spune că definesc alte 2 familii de transversale.

4. În cazul când punctele M, N, P sunt picioarele a 3 ceviene concurente, punctele M_1, N_1, P_1 se mai pot obţine şi în alt mod.

În adevăr, fie m_b, m_c punctele în care cevienele B N şi C P întâlnesc laturile A C şi A B respectiv şi m_1 punctul în care dreapta $m_b m_c$ întâlneşte latura B C.

Conform teoremei lui *Menelaus* avem:

$$\frac{m_1 B}{m_1 C}\cdot\frac{m_b C}{m_b A}\cdot\frac{m_c A}{m_c B}=1. \tag{6}$$

Paralelismul dintre $M m_b$ şi B N ne permite să scriem:

$$\frac{m_b C}{m_b N}=\frac{MC}{MB}\text{ şi }\frac{m_b N}{m_b A}=\frac{MO}{MA}, \tag{7}$$

O fiind punctul în care se întâlnesc cuvienele. Obţinem:

$$\frac{m_b C}{m_b A}=\frac{MO}{MA}\cdot\frac{MC}{MB}.$$

În mod analog, având în vedere paralelismul dintre $M m_c$ şi C P, avem:

$$\frac{m_c A}{m_c P}=\frac{MA}{MO}\text{ şi }\frac{m_c P}{m_c B}=\frac{MC}{MB}, \tag{8}$$

de unde scoatem:

$$\frac{m_c A}{m_c B}=\frac{MA}{MO}\cdot\frac{MC}{MB}.$$

Urmează:

$$\frac{m_b C}{m_b A}\cdot\frac{m_c A}{m_c B}=\left(\frac{MC}{MB}\right)^2,$$

astfel că această relaţiune, împreună cu (6), ne dă:

$$\frac{m_1 B}{m_1 C}=\left(\frac{MB}{MC}\right)^2,$$

ceea ce însemnează că punctul m_1 nu este altul decât punctul M_1.

Relaţiunile (7) şi (8) ne dau relaţiunea:

$$\frac{m_b N}{m_b A}=\frac{m_c P}{m_c A},$$

care ne spune că dreptele $m_b m_c$ sunt paralele.

5. *Paralelele prin vârfurile triunghiului la dreptele $M_b M_c$, $N_c N_a$, $P_a P_b$, respectiv, întâlnesc laturile triunghiului în 3 puncte colineare sau sunt concurente, după cum punctele iniţiale M, N, P sunt picioarele a 3 ceviene concurente sau sunt coliniare.*

În adevăr, însemnând cu M′ punctul în care latura B C este întâlnită de paralela prin A la $M_b M_c$, avem:

$$\frac{M'B}{M_1 B}=\frac{AB}{M_c B}=-\frac{BC}{MB},\ \frac{M_1 C}{M'C}=\frac{M_b C}{AC}=\frac{MC}{BC}$$

de unde:

$$\frac{M'B}{M'C}=-\frac{M_1 B}{M_1 C}\cdot\frac{MC}{MB}=-\left(\frac{MB}{MC}\right)^2\cdot\frac{MC}{MB}=-\frac{MB}{MC}.$$

Relaţiunea $\frac{M'B}{M'C}=-\frac{MB}{MC}$ ne spune că punctul M′ este conjugatul armonic al lui M faţă de B, C. (Este deci punctul în care N P întâlneşte pe B C.) În mod asămănător, N′ şi P′ fiind analoagele lui M′, deducem:

$$\frac{N'C}{N'A}=-\frac{NC}{NA},\ \frac{P'A}{P'B}=-\frac{PA}{PB}$$

şi deci:

$$\frac{M'B}{M'C}\cdot\frac{N'C}{N'A}\cdot\frac{P'A}{P'B}=-\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB},$$

ceea ce justifică proprietatea enunţată.

După cum am găsit punctele M', N', P', plecând dela punctele M, N, P, prin aceeaşi construcţie găsim punctele M'_n, N'_n, P'_n, plecând dela punctele M_n, N_n, P_n.

Punctele M'_n, N'_n, P'_n, sunt picioarele a 3 ceviene concurente, pentru orice valoare a lui n, întreagă şi pozitivă, căci M_n, N_n, P_n sunt colineare.

6. *Paralelele prin vârfurile triunghiului la dreptele $m_b m_c$ şi analoagele întâlnesc laturile triunghiului în 3 puncte colineare.*

În adevăr, fie m punctul în care latura BC este întâlnită de paralela prin A la $m_b m_c$, deci şi la NP, după cele de mai sus.

Avem:

$$\frac{mB}{mM'} = \frac{AB}{AP}, \qquad \frac{mM'}{mC} = \frac{AN}{AC},$$

de unde:

$$\frac{mB}{mC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{NA}{PA}.$$

In mod asemănător, n şi p fiind analoagele lui m, putem scrie:

$$\frac{nC}{nA} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{PB}{MB}, \qquad \frac{pA}{pC} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{MC}{NC}.$$

Deducem:

$$\frac{mB}{mC} \cdot \frac{nC}{nA} \cdot \frac{pA}{pB} = -\frac{MC}{MB} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{PB}{PA},$$

ceea ce însemnează, în adevăr, că m, n, p sunt colineare.

7. *Observare.* Dacă A_b şi A_c sunt punctele în care dreapta $m_b m_c$ întâlneşte dreptele MM_c şi MM_b respectiv, triunghiurile $MA_b m_c$ şi CNP sunt omotetice, centrul de omotetie fiind B. Înseamnează că ceviana BN trece prin A_b, omologul lui N. La fel, ceviana CP trece prin A_c.

Proprietate asemănătoare au punctele B_c, B_a şi C_a, C_b, analoagele punctelor A_b, A_c.

NOTE MATEMATICE

4. — Referitor la *Nota No. 4 din „R. M. T.", anul XX, No. 2, p. 23,* observ următoarele.

Luând în cercetare mai de aproape lucrarea d-lui *E. Vişa „Coordonate iperbolice"* („R. M. T.", anul XIX, No. 12, pp. 160–164) am constatat că această lucrare este originală şi nu este cuprinsă în lucrarea *P. Mansion, „Précis de la théorie des fonctions hyperboliques"*, care de fapt tratează funcţiile iperbolice pe cale algebrică şi geometrică.

M. ABRAMESCU

5. *Deux solutions à 2 paramètres de l'égalité multigrade*

$$A_1, A_2 \ldots A_6 \overset{p}{=} B_1, B_2 \ldots B_6, \quad (p = 1, 3, 5, 7).$$

α. $14m^2 - 7mn + 2n^2$, $28m^2 - 5mn - 2n^2$,
$42m^2 - 33mn + 6n^2$, $56m^2 - 51mn + 10n^2$,
$70m^2 - 51mn + 8n^2$, $84m^2 - 63mn + 12n^2 \overset{p}{=}$
$14m^2 + 5mn - 4n^2$, $28m^2 - 23mn + 4n^2$,
$42m^2 - 35mn + 8n^2$, $56m^2 - 35mn + 6n^2$,
$70m^2 - 61mn + 12n^2$, $84m^2 - 61mn + 10n^2$
$(p = 1, 3, 5, 7)$.

Exemple: $m = 3$, $n = 1$:

$$107, 235, 285, 361, 485, 579 \overset{p}{=}$$
$$137, 187, 281, 405, 459, 583$$
$$(p = 1, 3, 5, 7)$$

$S_1 = 2052$, $S_3 = 392.586.588$, $S_5 = \cdots 2132$,
$S_7 = \cdots 48$.

β. $4m^2 + 3mn + 8n^2$, $-4m^2 + 13mn + 12n^2$,
$-8m^2 + mn - 2n^2$, $2m^2 + 21mn + 10n^2$,
$8m^2 + 11mn - 4n^2$, $10m^2 + 11mn + 6n^2 \overset{p}{=}$
$9mn + 6n^2$, $19mn + 8n^2$,
$-6m^2 + 11mn + 10n^2$, $2m^2 - 7mn - 4n^2$,
$6m^2 + 15mn + 12n^2$, $10m^2 + 13mn - 2n^2$,
$(p = 1, 3, 5, 7)$.

Exemple: $m = 2$, $n = 1$.

On trouve, en nombres tous positifs:

$$7, 11, 15, 53, 91, 101, 129 \overset{p}{=}$$
$$33, 65, 71, 111, 127$$
$$(p = 1, 3, 5, 7)$$

$S_1 = 407$, $S_3 = 4.084\,487$, $S_6 = 52.892.606.327$,

$S_7 = \cdots 67$.

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVI, No 8, Aprilie 1941. Errare humanum est, de *I. Ionescu*. Philipp Melanchton şi matematicele, de *Victor Marian* Calculul vectorial (urmare), de Dr. *Plauţius Andronescu*. Premiul „*Al. Roşu*". Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Gazeta Matematică*, Supliment cu exerciţii, Anul VII, No. 8, Maiu 1941

3. *Pozitiva*, Revistă de Matematici, Anul I, Nr. 8, Aprilie 1941. Asupra unor teoreme de geometrie, de *G. G. Constantinescu*. Despre rădăcinele comune a două ecuaţii binoame, de *Mircea Mănescu*. Note matematice, probleme propuse şi rezolvate.

4 *Dr. Valeriu Patriciu*. Wie hat Rumänien die heutige Erdölproduktion erreicht? Zukunftsprobleme und möglichkeiten.

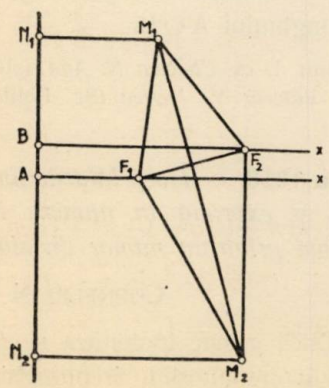
5. *Dr. Ioan Plăcinţeanu*. Elemente de Calcul Vectorial şi Tensorial. O lucrare concisă şi clară, de 127 pagini, de mare folos studenţilor din învăţământul superior.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 390. — *Coarda comună a două parabole având aceiaşi directoare este perpendiculară pe mijlocul dreptei care uneşte cele două focare.*

V. VALCOVICI

Fie F_1, F_2 focarele şi M_1, M_2 intersecţiile celor două parabole care au aceiaşi directoare.



Dacă N_1, N_2 sunt proiecţiile lui M_1, M_2 pe directoare avem, conform unei proprietăţi geometrice a parabolei:

$$M_1 N_1 = M_1 F_1 \quad \text{şi} \quad M_1 N_1 = M_1 F_2$$

$$M_2 N_2 = M_2 F_1 \quad \text{şi} \quad M_2 N_2 = M_2 F_2 .$$

Rezultă că triunghiurile $F_1 M_1 F_2$ şi $F_1 M_2 F_2$ sunt isoscele şi deci $M_1 M_2$ este perpendiculară pe mijlocul lui $F_1 F_2$.

S'au primit foarte bune soluţii analoage de la: *Botea G. N.* (†), *Dorneanu S V.* şi *Sripcă L.*

Gl. *Gh. B.*

Problema 1804. — *O dreaptă variabilă trecând printr'un punct fix* C, *taie laturile unghiului dat* A O B *în punctele* D şi E.

1°. *Să se afle locul descris de centrul cercului circumscris triunghiului* O D E.

2°. *Presupunând că* C *este pe bisectoarea interioară a unghiului* A O B, *să se afle locul polului dreptei* D E *în raport cu cercul* O D E.

Soluţia autorului. 1°. Să luăm ca axe Ox şi Oy bisectoarele unghiului A O B şi fie $y = ax$, $y = -ax$ ecuaţiile laturilor O A, O B şi $C(p, q)$ punctul dat. Se ştie că ecuaţia unei conice circumscrise triunghiului format de dreptele $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ este

$$D_1 D_2 + \lambda D_2 D_3 + \mu D_3 D_1 = 0.$$

Presupunând că D_1, D_2, D_3 sunt O A, O B,

$$DE \equiv y - q - m(x - p) = 0,$$

ecuaţia precedentă devine

$$(1) \quad y^2 - a^2 x^2 + \lambda (y - ax)[y - q - m(x - p)] + \mu (y + ax)[y - q - m(x - p)] = 0.$$

Această ecuaţie reprezintă un cerc, când coeficientul lui xy este zero şi coeficienţii lui x^2 şi y^2 sunt egali,

$$m(\lambda + \mu) + a(\lambda - \mu) = 0,$$

$$-(\lambda + \mu) + am(\lambda - \mu) = 1 + a^2.$$

De unde

$$(2) \quad \lambda + \mu = -\frac{1 + a^2}{1 + m^2}, \quad \lambda - \mu = \frac{m(1 + a^2)}{a(1 + m^2)}.$$

Ecuaţia (1) a cercului O D E devine

$$(1 + \lambda + \mu)(x^2 + y^2) +$$

$$(q - mp)a(\lambda - \mu)x - (q - mp)(\lambda + \mu)y = 0.$$

Inlocuind pe $\lambda + \mu$ şi $\lambda - \mu$ cu valorile lor din (2), avem

$$\frac{m^2-a^2}{1+m^2}(x^2+y^2)+(q-mp)\frac{(1+a^2)m}{1+m^2}x$$

$$+(q-mp)\frac{1+a^2}{1+m^2}y=0,$$

$$(3)\qquad x^2+y^2+(q-mp)\frac{1+a^2}{m^2-a^2}(mx+y)=0.$$

Coordonatele centrului acestui cerc sunt

$$x=-\frac{1}{2}(q-mp)\frac{m(1+a^2)}{m^2-a^2},$$

$$y=-\frac{1}{2}(q-mp)\frac{1+a^2}{m^2-a^2},$$

m fiind variabil. De unde $x=my$, şi înlocuind pe $m=\frac{x}{y}$ în a doua din ecuaţiile precedente, locul centrului este

$$x^2-a^2y^2+\frac{1}{2}(1+a^2)(qy-px)=0,$$

o iperbolă cu direcţiile asimptotice $x^2-a^2y^2=0$, perpendiculare pe dreptele

$$OA,\ OB,\qquad y^2-a^2x^2=0.$$

Aceasta se poate vedea în mod geometric. Dreapta DE trecând prin punctul fix C, determină pe OA şi OB două diviziuni omografice. Deci, centrul I al cercului ODE, care este la intersecţia perpendicularelor pe mijloacele lui OD şi OE, descrie o conică. Considerând cazul când DE este paralelă cu OA, D este la înfinit în direcţia perpendicularei pe mijlocul lui OE, adică a perpendicularei pe OB. Conica este o iperbolă cu direcţiile asimptotice perpendiculare pe laturile OA şi OB ale unghiului AOB.

2°. Când C este pe bisectoarea întâia a unghiului AOB, $q=0$, ecuaţia (3) a cercului devine

$$x^2+y^2-\frac{mp(1+a^2)}{m^2-a^2}(mx+y)=0.$$

Polara punctului (X, Y) în raport cu acest cerc are ecuaţia

$$(4)\qquad xX+yY-A(x+X)-B(y+Y)=0,$$

$$(5)\ A=\frac{m^2p(1+a^2)}{2(m^2-a^2)},\qquad B=\frac{mp(1+a^2)}{2(m^2-a^2)},\qquad A=mB.$$

Această polară trebuind să fie identică cu dreapta DE, a cărei ecuaţie este

$$(6)\qquad y=m(x-p),$$

trebue să fie proporţionali coeficienţii lui x, y şi termenii liberi din ecuaţiile (4) şi (6). Deci

$$\frac{X-A}{m}=\frac{Y-B}{-1}=\frac{AX+BY}{mp}.$$

De unde

$$X-A+m(Y-B)=0$$

$$p(X-A)-AX-BY=0,\qquad A=mB,$$

sau

$$X+mY-2mB=0,$$

$$(p-mB)X-BY-pmB=0.$$

Rezolvând, avem

$$X=\frac{mB(pm+2B)}{pm+B-m^2B},\qquad Y=\frac{mB(p-2mB)}{pm+B-m^2B},$$

unde înlocuind pe B din (5), obţinem

$$X=\frac{p(1+a^2)}{1-a^2}\cdot\frac{m^2}{m^2-a^2},$$

$$Y=-\frac{p(1+a^2)a^2}{1-a^2}\cdot\frac{m}{m^2-a^2},$$

$$a^2X+mY=0,\qquad m=-\frac{a^2X}{Y}.$$

Inlocuind pe m în valoarea lui Y, avem

$$a^2X^2-Y^2-pa^2\frac{1+a^2}{1-a^2}X=0.$$

Deci locul polului dreptei DE în raport cu cercul ODE este o iperbolă cu centrul pe bisectoarea interioară şi cu direcţiile asimptotice perpendiculare pe laturile unghiului AOB.

Au dat soluţii D-ra *Checian N. Ana* (studentă, Timişoara) şi D-l *Valeriu V. Herlea* (Şc. Polit., Timişoara).

Problema 1810. — *Dacă laturile unui triunghiu dreptunghiu se exprimă în numere întregi, aria lui se exprimă printr'un număr divizibil cu 6.*

CORNELIU N. POPESCU

Soluţie. Dacă a este ipotenuza şi b, c catetele unui triunghiu dreptunghiu dreptunghic, avem

$$a^2=b^2+c^2,$$

relaţie care în numere întregi este satisfăcută, după cum se ştie, dacă luăm

$a = m^2 + n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 - n^2$, $(m > n)$

unde m, n sunt numere întregi.

Dacă S este suprafaţa triunghiului dreptunghic, trebuie să aratăm conform enunţului că expresia

$$S = \frac{bc}{2} = mn(m^2 - n^2)$$

este divizibilă cu 6.

In adevăr, observăm că:

1°. Dacă unul din numerele m, n este par, produsul mn este divizibil cu 2; iar dacă m, n sunt impari, atunci $m^2 - n^2$ este divizibil cu 2.

S este astfel divizibil cu 2 oricare ar fi întregii m, n.

2°. Dacă unul din factori m, n este divizibil prin 3, evident că S este divizibil cu 3. Dacă nici unul din factorii m, n nu este divizibil cu 3, ei sunt de forma

$$m = \text{mult}\,3 \pm 1, \qquad n = \text{mult.}\,3 \pm 1$$

şi atunci

$$m^2 - n^2 = (\text{mult.}\,3 \pm 1)^2 - (\text{mult.}\,3 \pm 1)^2 =$$

$$(\text{mult.}\,3 + 1) - (\text{mult.}\,3 + 1) = \text{mult.}\,3.$$

Ori cum ar fi astfel întregii m, n, rezultă că S este divizibil cu 3.

S fiind divizibil prin factorii primi 2 şi 3, este divizibil şi cu produsul lor, 6.

Astfel problema este rezolvată

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Cristea I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Schapira Salo* (lic. Piatra-Neamţ), *Şimon Ş. Petru* (lic. Arad), *Theodorescu N. Dorin* (Şe. Navală), *Ţilică C. Ştefan* (Şc. Of. de Geniu, Bucureşti), *Ţarălungă Gh. Savel* şi *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu).

Problema 1815. — *Să se arate că patrulaterul cu laturile pe dreptele*

$$cx \pm ay - a^2 = 0$$

$$cx \pm ay + a^2 = 0,$$

este circumscris elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad a^2 - b^2 = c^2,$$

iar punctele de tangenţă formează un dreptunghiu. Insemnând cu s_1, s_2 respectiv ariile patrulaterului şi dreptunghiului, iar cu AA', BB' axele elipsei, avem

$$AA' \cdot BB' = \sqrt{2 s_1 s_2}.$$

STEFAN MUSTA

Ecuaţiile laturilor patrulaterului se pot scrie

$$(1) \quad y = \pm \frac{cx - a^2}{a}, \qquad (2) \quad y = \pm \frac{cx + a^2}{a}.$$

Dreptele (1) şi (2) sunt simetrice în raport cu axa Ox, şi cum şi elipsa are pe Ox ca axă de simetrie, urmează că e suficient să arătăm că una din dreptele (1) sau (2) este tangentă. De exemplu, să arătăm că dreapta

$$y = \frac{cx - a^2}{a}$$

este tangentă. Luând intersecţia ei cu elipsa, avem ecuaţia

$$b^2x^2 + (cx - a^2)^2 - a^2b^2 = 0, \quad x^2 - 2cx + c^2 = 0,$$

care are rădăcina dublă $x = c$, iar punctul de tangenţă este

$$M\left(c, -\frac{b^2}{a}\right).$$

Dreapta simetrică

$$y = -\frac{cx - a^2}{a}$$

este tangentă în punctul

$$N\left(c, \frac{b^2}{a}\right).$$

In mod analog arătăm că dreptele

$$y = \pm \frac{cx + a^2}{a}$$

sunt tangente în punctele

$$P\left(-c, \frac{b^2}{a}\right), \qquad Q\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right).$$

Observăm coordonatele acestor puncte, se vede că figura MNTQ este un dreptunghiu cu dimensiunile

$$MN = 2\frac{b^2}{a}, \qquad NP = 2c.$$

Luând intersecţiile laturilor patrulaterului circumscris elipsei, găsim coordonatele vârfurilor

$$M'\left(\frac{a^2}{c}, 0\right), \quad N'(0, a), \quad P'\left(-\frac{a^2}{c}, 0\right), \quad Q'(0, -a),$$

de unde rezultă că sunt pe axe şi că figura $M'N'P'Q'$ este un romb cu diagonalele

$$M'P' = 2\,\frac{a^2}{c}, \qquad N'Q' = 2\,a.$$

Aria rombului este

$$s_1 = 2\,\frac{a^3}{c},$$

iar a dreptunghiului

$$s_2 = 4\,\frac{b^2 c}{a}.$$

Deci

$$s_1\, s_2 = 8\,a^2 b^2,$$

$$2\,s_1\, s_2 = 16\,a^2 b^2 = 4\,a^2 . 4\,b^2 = \overline{AA'}^2 . \overline{BB'}^2,$$

$$AA' . BB' = \sqrt{2\,s_1\, s_2}.$$

Soluţie dată de d-ra *Elena Papadopol-Demetra* şi d-nii *N. Brădeanu, N. I. Cristea, Valeriu V. Herlea, Ioan M. Logofătu, Mircea Negrea, Dorin N. Teodorescu, Ştefan C. Tilică, Gheorghe Voştinariu.*

PROBLEME PROPUSE

1938. — Suma unui cub perfect şi a unui patrat perfect ne dă un patrat perfect de trei cifre, la care adăogând un patrat perfect de două cifre, găsim patratul numărului următor. Să se găsească acel patrat.

DUMITRU VENTER

1939. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^3 - y = a \\ y^3 - x = a \end{cases}$$

M. GHERMANESCU

1940. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 - y} + a)^3 - (\sqrt{x^2 - y} + b)^3 = m \\ (\sqrt{y^2 - x} + b)^3 - (\sqrt{y^2 - x} + a)^3 = n. \end{cases}$$

LT. M. GRUMAZESCU

1941. — *Să se rezolve sistemul diofantian:*

$$\begin{cases} y\,z + 1 = u^2 \\ z\,x + 1 = v^2 \\ x\,y + 1 = w^2 \end{cases}$$

A. GLODEN

1942. — Pe laturile triunghiului ABC înscris în cercul O, se consideră picioarele a trei ceviene concurente A_1, B_1, C_1 şi trei puncte colineare A_2, B_2, C_2. A_3, B_3, C_3 fiind triunghiul format de centrele cercurilor BOC, COA şi AOB, să se arate că:

1. Perpendicularele coborâte din O pe AA_1, BB_1, CC_1 intersectează laturile triunghiului $A_3B_3C_3$ în trei puncte colineare.

2. Perpendicularele coborâte din A_3, B_3, C_3 respectiv pe OA_2, OB_2, OC_2 sunt concurente.

TEODOR GH. COCEA

1943 — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sin a\,x = \cos b\,y \\ \operatorname{tg} c\,x = \operatorname{cotg} d\,y, \end{cases}$$

în care a, b, c, d sunt numere date. Să se formeze şi să se rezolve toate sistemele analoage care se pot forma luând în toate modurile posibile patru linii trigonometrice.

G-L GH. BUICLIU

1944. — Să se construiască configuraţiile date de sistemele parametrice,

$$\begin{cases} x = \dfrac{cp\,\theta}{sp\,\theta - 1} \\ y = \dfrac{sp\,\theta}{sp\,\theta - 1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{sp\,\omega}{sp\,\omega - 1} \\ y = \dfrac{cp\,\omega}{sp\,\omega - 1} \end{cases}$$

şi să se calculeze aria comună interioară lor.

V. ALACI

1945. — Pentru determinarea experimentală a a centrului de greutate a unui avion, se aseză aparatul pe două cântare situate la aceiaşi înălţime, primul cântar indicând greutatea $P = 4{,}5$ tone, corespunzătoare roţilor din faţă, iar al doilea greutatea $Q = 1{,}5$ tone cu care apasă trenul de aterisaj. Distanţa de la punctul de sprijin al trenului la dreapta ce uneşte punctele de sprijin ale roţilor este de 4,5 metri.

Se ridică apoi în sus coada avionului până ce axa motorului face unghiul $\theta = 15^0$ cu vechea ei poziţie, roţile rămânând însă nemişcate. In această nouă poziţie, cântarele indică respectiv 5 tone şi o tonă.

Să se determine poziţia centrului de gravitate G al avionului faţă de un sistem de axe rectangulare convenabil ales.

RADU BADESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. (1836, 1859, 1866, 1871, 1874, 1879, 1883, 1884, 1887, 1888 1891, 1895, 1896, 1913, 1921); *Boerescu P. G.* (1859, 1887, 1906, 1907, 1914); *Cristea D. Viorel* (1877, 1902, 1924); *Dobrescu V. Eugen* (N.); *Ionescu F. Petre* (1856, 1859, 1895, 1906, 1922, 1924); *Luca L. Laurentiu* (1902, 1924, 1931); *Mang Ileana* (1844, 1845, 1883, 902. 1914, 1916, 1927); *Manolache C. Mircea* (1892, 1895, 900, 1902, 1914, 1916, 1931, 1933); *Mohrenholz Johannes* (A., 1898, 1901, 1904, 1911, 1912, 1916, 1919, 1921, 1923, 1924, 1925, 1928); *Naneş Cornelia* (P.) *Enăchescu Ion* (1486, 1633, 1659, 1681, 1697, 1777, 1827, 1859, 1907); *Tica P. Marin-Gall* (1888, 1917, 1931); *Ţărălungă Savel* (1783. 1903, 1914, 1931. 1933); *Vasiliu G. D-tru* (1647, 1664, 1681, 1688, 1763, 1817, 1818, 1827, 1840, 1871, 1883, 1888, 1895. 1896, 1906, 1907, 1914).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XIX, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 12 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

$$\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - l^2}}$$

devine 1 pentru $\varrho \to \infty$, deducem că P descrie o hiperbolă echilateră având ca asimptote bisectoarele unghiului D O x.

Soluția 2. Luăm ca axe de coordonate chiar dreapta O x și perpendiculara în O pe O x. Fie $(\alpha\ \beta)$ coordonatele lui P și

$$(1) \qquad y = m\,x$$

ecuația dreptei O D. Ecuația cercului P este

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$$

Dar ϱ fiind distanța lui P (α, β) la dreapta (1', avem

$$\varrho = \frac{m\,\alpha - \beta}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

și înlocuind în (2) se găsește că ecuația cercului P este

$$(3) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{(m\,\alpha - \beta)^2}{1+m^2}$$

Făcând în (3) pe y egal cu zero, se găsește că abscisele punctelor E și F sunt

$$x_1 = \alpha + \sqrt{\frac{m^2\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta\,m + \beta\,m^2}{1+m^2}}$$

$$x_2 = \alpha - \sqrt{\frac{m^2\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta\,m + \beta\,m^2}{1+m^2}}$$

Conform ipotezei

$$\overline{EF}^2 = (x_2 - x_1)^2 = 4\,l^2$$

deci

$$4\,\frac{m^2\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta\,m + \beta\,m^2}{1+m^2} = 4\,l^2$$

$$\therefore \qquad m^2\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta\,m + \beta\,m^2 = l^2(1+m^2),$$

sau trecând la coordonate curente

$$m^2 X^2 - 2\,m\,X\,Y + m^2 y^2 = l^2(1+m^2)$$

care este o hiperbolă.

Soluția II a fost dată de d-l *Radoslav G. I.* (Școala Politechnică, București).

PROBLEME PROPUSE

1962. — Să se găsească numerile întregi a și b, al căror produs se obține scriind unul după altul numerile $a-1$ și $b-1$.

G-L GH. BUICLIU

1963. — În ce sistem de numerație, a cărui bază este inferioară lui 100, există patrate de patru cifre de forma $a\,a\,a\,a$?

V THÉBAULT

1964. — Să se elimine a, b, c din ecuațiile:

$$\begin{cases} a\,x^2 - c\,x + b = 0 \\ (a+b+c)\,y^2 - (2\,b+c)\,y + b = 0. \end{cases}$$

V. ALACI

1965. — Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \Sigma\, y^3 z^3 (x-1)(x+1)^2 = \dfrac{9}{8}\, x^3 y^3 z^3 \\ \Sigma\, y^3 z^3 (x+1)(x-1)^2 = \dfrac{3}{8}\, x^3 y^3 z^3 \\ x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3 = \dfrac{1}{8}\, x^3 y^3 z^3 \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

1966. — Să se soluționeze în numere întregi pozitive sistemul diofantian:

$$\begin{cases} x + y = u + v + w \\ x\,y = u\,.\,v\,.\,w. \end{cases}$$

A MOESSNER

1967. — Fie M un punct variabil pe o elipsă, A și A' două vârfuri opuse ei. Perpendiculara dusă din A' pe dreapta A M taie a doua oară elipsa în M'. Să se găsească locul geometric al punctelor de întretăiere al tangentelor în M și M' la elipsa dată. CORNELIA NANES

1968. — Să se rezolve ecuația:

$$(sp\,x+1)^2 + (cp\,x+1)^2 + (Sp\,x+1)^2 + (Cp\,x+1)^2 + (\operatorname{tg} x+1)^2 + (\operatorname{cotg} x+1)^2 = \frac{200}{3}.$$

CPT. C V COSTACHESCU

1969. — Să se arate că,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \operatorname{tg}(x+y) = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg}(x+y),$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg}(x+y)(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) = 1 - \sec x \sec y \sec(x+y),$$

în cazul,

$$x + y + z = n\,\pi \qquad (n \text{ întreg}).$$

N N. MIHAILEANU

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.

2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureştf V.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XX, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 12 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

ANUL XXI. SEPTEMVRIE 1941 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **PETRE SERGESCU:** O ORA DE SEMINAR MATEMATIC.
2. **O. N. TINO:** O PROPRIETATE A BISECTOAREI INTR'UN TRIUNGHIU.
3. NOTE MATEMATICE: 17, 18.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 100, 141, 164, 259, 1586, 1666.
6. PROBLEME PROPUSE: 1970-1977.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XXI — No. 7 TIMISOARA, SEPTEMVRIE 1941

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

O ORĂ DE SEMINAR MATEMATIC

DE

PETRE SERGESCU.

D-l prof *D. Pompeiu* a fost, acum douăzeci de ani, organizatorul Seminarului de Matematici al Universității din Cluj. Sufletul pe care D-sa l-a cheltuit la întemeere s'a transmis, an de an, de la profesori la studenți și a făcut din secția de matematici clujeană o adevărată familie spirituală strâns unită. Ea a continuat să trăiască în Timișoara, unde ne-a aruncat exilul de la Cluj.

Rând pe rând au reînviat la Timișoara manifestările matematice, care deveniseră o tradiție scumpă la Cluj: Seminarul pentru învățământul matematicii, Cercul Matematic al Societății de Științe din Cluj, publicația Monografiilor matematice. Bibliotecile Seminariilor sunt în curs de reorganizare; se pregătește darea la tipar a volumului 17 din *Mathematica*. Mai lipsiau adunările atât de plăcute și de folositoare din „Săptămânile Matematice", pe care le aveam de peste zece ani la Cluj. În Iunie și Iulie 1941, în plin războiu pentru recucerirea hotarelor noastre sfinte și vecinice, profesorii clujeni au folosit venirea la Timișoara a D-lui prof. *D. Pompeiu*, pentru a organiza și o astfel de săptămână matematică. Entuziasmul tineresc al profesorilor a rămas neatins de anii ce s'au adunat pe capetele noastre. Suntem și acum cu acelaș elan și bucurie în fața tablei negre ca acum zece ani. Doar numărul nostru s'a mai mărit de atunci: Colegii de la Politecnica din Timișoara s'au adăugat familiei noastre matematice. Prezența D-lui *Pompeiu* printre noi ne-a readus în timpul eroic al începuturilor de la Cluj, unde fiecare din noi a lăsat partea cea mai bună din sufletul său.

În ședințele săptămânii matematice din 1941, fiecare din noi a expus cercetările sale din ultimul an, rezultatele și decepțiile, greutățile întâlnite sau învinse. Gândurile noastre s'au precizat și s'au întregit în discuții libere. E sigur că mai multe articole își vor avea origina în această săptămână matematică.

Una din ședințe a fost particular de animată, căci aproape toți participanții au luat cuvântul. Era vorba de o chestie elementară de geometrie. Întregirile fiecăruia produceau bucuria grupului întreg, care urmăria cu creta în mână pe vorbitor, gata să intervină.

Ne-am gândit că acest fel de lucru colectiv — obicinuit de mult în apus — ar fi un mijloc excelent de inițiere pentru tineretul nostru iubitor de matematică. Un exemplu de acest fel de discuție matematică poate lumina anume taine ale cercetării și poate deprinde cu creația științifică. De aceea, am socotit că ar fi folositor să prezentăm cititorilor felul cum a decurs ședința noastră. Colegii m'au însărcinat pe mine cu redactarea acestui „proces verbal" amănunțit. El formează subiectul articolului de față.

D-l prof. *D. Pompeiu* ne-a vorbit despre foloasele pe care le poate trage geometria din cercetările de teoria funcțiilor. Proprietățile câtimilor complexe pot fi traduse prin imagini geometrice O proprietate generală a funcțiilor analitice se traduce în general prin enunțuri generale geometrice, fără prea mare interes Dar, dacă *particularizăm* funcțiile, de pildă dacă luăm polinoame speciale în locul funcțiilor generale, se poate ca interpretarea geometrică să dea proprietăți frumoase ale figurilor. Un exemplu în acest sens e cunoscuta teoremă a D-lui *D. Pompeiu* despre triunghiul echilateral, care a dat loc la vreo douăzeci de demonstrații geometrice și la multe generalizări și articole. Un alt rezultat frapant ne e prezentat de D-l *D. Pompeiu* acum, tot prin considerații analoage:

Într'un triunghiu, bisectoarea unui unghiu e mai mică decât semisuma laturilor adiacente.

D-l *M. Ghermănescu* sare imediat să dea o demonstrație geometrică acestei proprietăți.

Fie triunghiul A B C și bisectoarea C C'. Presupunem odată pentru totdeauna pentru fixarea ideilor C B < C A, adică $a < b$. Se știe că avem

$$\overline{C C'}^2 = a b - C' A \cdot C' B.$$

Deci, evident:

$$(2\overline{C C'})^2 < 4 a b = (a+b)^2 - (b-a)^2 < (a+b)^2$$

ceea ce demonstrează proprietatea. Inegalitatea precedentă arată că: o bisectoare, semisuma și semidiferența laturilor adiacente dintr'un triunghiu oarecare, nu pot fi laturile unui triunghiu dreptunghiu (din cauza teoremei lui *Pitagora).*

D-l *V. Alaci.* Am și eu o demonstrație. Duc B β perpendicular pe C C' (fig. 1). Avem:

$$(1) \qquad C\beta < B C = a,$$

căci perpendiculara e mai mică decât oblica. Din β duc paralela la C A, care tae pe B A în mijlocul M. Avem în triunghiul B' B A:

$$\beta M = \frac{\beta' A}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

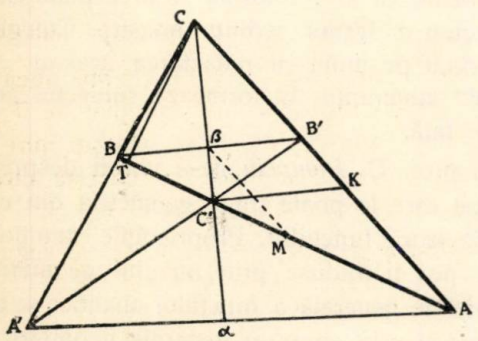


Fig 1.

Observ că bisectoarea se găsește de aceiaș parte cu latura mai mare față de înălțime. În adevăr, dacă C T e înălțimea

$$\sphericalangle B C T = \text{complimentul lui B},$$

$$\sphericalangle A C T = \text{complimentul lui A}.$$

Or, în triunghiul A B C la latura mai mare b decât a se opune unghiul mai mare B decât A. Prin urmare

$$\sphericalangle B C T < \sphericalangle A C T$$

și deci C C' e de aceiaș parte cu a față de C T. Dar atunci oblica β M e mai depărtată de piciorul perpendicularei ca oblica β C' și avem:

$$(2) \qquad \beta C' < \beta M = \frac{b-a}{2}.$$

Adunând relațiile (1) și (2) obținem în fine:

$$C\beta + \beta C' = C C' < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}. \quad \text{c c.t.d.}$$

D-l *P. Sergescu.* Fie triunghiul A B C (fig. 1) și bisectoarea C C'. Avem B C' < A C', căci C' împarte pe A B în părți proporționale cu a și b. Rotim triunghiul cu 180° în jurul lui C' până vine în poziția C A' B'. Perpendiculara pe C C' în C' tae pe C B' A în K, iar C' K e bisectoarea unghiului B' C' A. Deci:

$$\frac{K B'}{K A} = \frac{C' B'}{C' A} = \frac{C' B}{C' A} = \frac{a}{b} < 1.$$

Faptul că A K > K B' atrage

$$C K < \frac{C B' + C A}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Pe de altă parte oblica C K e mai mare decât perpendiculara C C', așa că $2 C C' < a+b$. c.c.e.d d.

D-l *Th. Angheluță.* Aș vrea o demonstrație mai simplă, care să nu se bazeze pe proprietatea bisectoarelor de a împărți latura opusă în părți proporționale cu laturile adiacente.

D-l *P. Sergescu.* Să lăsăm perpendicularele B β și A α pe C C'. Triunghiurile dreptunghice C B β și C A α sunt asemenea, căci unghiurile din C sunt egale. Ca atare

$$\frac{C B}{C A} = \frac{C\beta}{C\alpha} < 1.$$

Dar și triunghiurile B β C' și A α C' sunt asemenea și atunci și

$$C'\beta < C'\alpha. \qquad \text{Adunând cu } C\beta < C\alpha,$$

rezultă că $C C' < \frac{C\alpha + C\beta}{2}$, *adică bisectoarea e mai mică decât semisuma proecțiilor pe ea ale laturilor adiacente.*

Proecțiile unei laturi pe bisectoare fiind evident

mai mici decât laturile respective, proprietatea e stabilită.

De fapt această demonstrație maschează proprietatea clasică a piciorului bisectoarei, căci din asemănările triunghiurilor de mai sus avem în mod succesiv

$$\frac{CA}{C\beta} = \frac{C\alpha}{C\beta} = \frac{A\alpha}{B\beta} = \frac{AC'}{BC'}.$$

D-l *Th. Angheluță*. Ei bine. Eu am o demonstrație care nu face să intervină nici măcar asemănarea triunghiurilor, ci se bazează numai pe proprietatea că într'un triunghiu la latura mai mare se opune unghiul mai mare și reciproc.

Prelungesc mediana CM (fig. 2) până unde întâlnește în B″ paralela la CB dusă prin A. Triunghiurile BCM și AMB″ sunt egale căci au BM=MA cuprinse între unghiuri respectiv egale. Rezultă $CM = MB''$, $CB = AB''$ și $\sphericalangle BCM = \sphericalangle B''$, în triunghiul CAB″ avem $CA > AB''$ (prin ipoteză, căci am presupus $a < b$), deci

$$\sphericalangle B'' = \sphericalangle BCM > \sphericalangle ACM.$$

Bisectoarea CC′ se găsește deci între CB și mediana CM. Pe de altă parte, am văzut mai sus că bisectoarea se găsește de aceiaș parte cu latura mai mare CA față de înălțimea CT. Cu alte cuvinte piciorul C′ al bisectoarei e cuprins între T și M și deci oblica CC′ e mai scurtă ca oblica CM care e mai depărtată de perpendiculara CT.

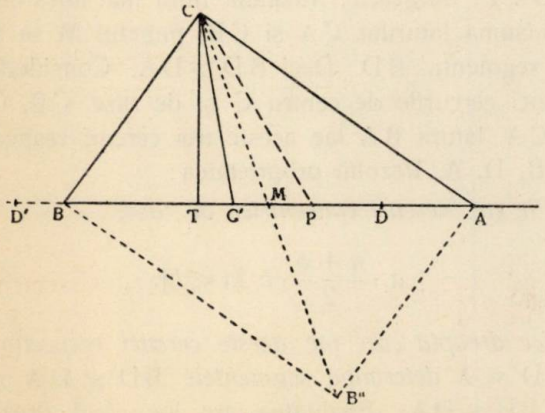


Fig. 2.

Dar în triunghiul CAB″

$$CA + AB'' > CB'' = CM + MB'' = 2CM$$

și deci:

$$2CC' < CA + CB.$$

Demonstrația de mai sus nu e particulară bisectoarei. Ea se aplică la toate dreptele duse din C, care tae baza BA într'un punct cuprins între B și M. De sigur că acest fapt se poate extinde. Se pune astfel întrebarea: care drepte duse dintr'un vârf până la un punct de pe latura opusă sunt mai mici ca semisuma laturilor adiacente. A *priori*, punctul de pe bază nu poate fi oriunde pe AB.

D-l *P. Sergescu*. Evident. E de ajuns să ducem o dreaptă foarte aproape de CA (fig. 2). Lungimea ei va fi cât vrem noi de aproape de b, deci va fi mai mare ca $\frac{a+b}{2}$. Principiul *continuității* arată că numai dreptele CP destul de depărtate de CA pot fi mai mici ca $\frac{a+b}{2}$.

Picioarele P ale acestor drepte se găsesc între B și punctul D în care cercul de centru C și de rază $\frac{a+b}{2}$ tae pe AB. Există un *singur* astfel de punct D cuprins între A și B. În adevăr $\frac{a+b}{2}$ e mai mare ca a și mai mic ca b. Deci vârful A e mai depărtat de piciorul înălțimii T decât punctele D și D′ în care cercul de centru C și de rază $\frac{a+b}{2}$ tae pe AB; pe de altă parte, oblica $CB = a$ e mai mică decât CD și CD′, adică B e mai apropiat de T decât D și D′. Cu alte cuvinte B se găsește între D și D′, adică un singur punct D se găsește între B și A, pe când D′ e în afară de A și B.

Pentru toate punctele P cuprinse pe segmentul BD, avem deci $CP < \frac{a+b}{2}$.

Cu aceste observații, cazul bisectoarei apare evident. Piciorul bisectoarei C′ e mai aproape de B decât de A, căci împarte pe BA în părți proporționale cu a și cu b. Iar punctul D e mai aproape de A de cât de B, căci mediana e mai mică decât $\frac{a+b}{2}$. Deci C′ e un punct de pe segmentul BD și proprietatea e stabilită.

Observăm că dacă $BC = AC$, punctele D și D′ coincid cu B și cu C. Pentru triunghiul isoscel,

orice dreaptă dusă din vârf până la bază e mai mică ca latura egală, ceeace e evident de altfel.

Pentru punctele P interioare segmentului BD avem inegalitatea

$$2CP < CB + CA;$$

dar pentru punctul D el însuşi avem egalitatea

$$2CD = CB + CA.$$

D-l *M. Ghermănescu.* Exprimând pe CP cu ajutorul relaţiei lui *Stewart* ajungem la aceleaşi concluzii. Obţinem inegalitatea:

$$4b^2 . AP + 4a^2 . BP - 4c\,BP . AP < c(a+b)^2$$

sau punând $BP = x$, $AP = c - x$:

$$4cx^2 - 4(a^2 - b^2 + c^2)x + 4a^2 c - c(a+b)^2 < 0.$$

Trinomul din primul membru are două zerori reale x_1, x_2 aşa că inegalitatea propusă are loc când P e cuprins între două puncte D' şi D, unul între A şi B şi altul în exterior, fiindcă produsul rădăcinilor e negativ.

Pe fiecare latură a triunghiului se găsesc câte două puncte analoage. Oare aceste şase puncte nu se găsesc pe o conică?

D-l *Pl. Andronescu:* Ar fi o „conică *Ghermănescu*".

D-l *M. Ghermănescu:* Fie E şi E', F şi F' punctele analoage lui D şi D', respectiv pe laturile BC şi CA.

Avem:

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{D'A}{D'B} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{E'B}{E'C} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{F'C}{F'A} = \frac{a+2b}{b+2a} \cdot \frac{b+2c}{c+2b} \cdot \frac{c+2a}{a+2c}.$$

În general membrul al doilea e diferit de 1. Deci, din păcate, punctele D_1D', E_1E', F_1F' nu se găsesc pe o conică, în baza teoremei lui *L. Carnot.*

Numai în triunghiurile particulare pentru care

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a) = (b+2a)(c+2b)(a+2c),$$

cele şase puncte se găsesc pe o conică.

Dacă luăm însă şi punctele D'', E'', F'' respectiv pe AB, BC, CA, astfel ca:

$$\frac{D''A}{D''B} = \frac{2a+b}{2b+a}, \quad \frac{E''B}{E''C} = \frac{2b+c}{2c+b}, \quad \frac{F''C}{F''A} = \frac{2c+a}{2a+c}.$$

Teorema lui *Carnot* arată că există o infinitate de cubice care trec prin cele 9 puncte.

Se deduce de aci şi proprietatea: *Dacă trei din cele nouă puncte de intersecţie ale laturilor unui triunghiu cu o cubică, sunt picioarele a trei ceviene, celelalte şase se află pe o conică.*

D-l *V. Alaci:* Bisectoarele sunt ceviene, astfel că fiecare e mai scurtă decât semisuma laturilor adiacente. Chestiunea se poate pune mai general: Există ceviene $CP = \gamma$ astfel ca

$$\gamma < \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}?$$

(în cazul bisectoarei, $\lambda = 1$). De oare ce a şi b sunt mai mari ca înălţimea triunghiului, este clar, că un cerc de centru C şi de rază $\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$ tae latura AB a triunghiului, în două puncte Q şi R. Toate dreptele CP, unde P e cuprins în segmentul QR satisfac chestiunii.

Pe celelalte laturi ale triunghiului se pot găsi câte o pereche de puncte Q_1, R_1 şi Q_2, R_2 analoage cu Q, R. Se pot găsi totdeauna şase astfel de puncte, care se află pe o conică. În adevăr, noi dispunem de parametrul λ, care-i lipsia D-lui *Ghermănescu.* Problema se poate trata analitic, calculând coordonatele punctelor Q şi R, care depind de λ, analog coordonatele punctelor Q_1, R_1, Q_2, R_2 şi scriind că cele şase puncte se găsesc pe o conică, ceea ce permite să se calculeze λ respectiv.

D-l *P. Sergescu*: Mediana fiind mai mică decât semisuma laturilor CA şi CB, punctul M se află pe segmentul BD. Deci $BD > DA$. Considerând atunci cercurile de centru C şi de raze CB, CD şi CA, latura BA tae aceste trei cercuri respectiv în B, D, A. Rezultă proprietatea:

Fie trei cercuri concentrice de raze,

$$a\,,\ \frac{a+b}{2}\,,\ b\ \ [a < b].$$

Orice dreaptă care tae aceste cercuri respectiv în B, D *şi* A *determină segmentele* BD *şi* DA *aşa ca* $BD \geqq DA$. (Egalitatea are loc când dreapta trece prin centrul cercurilor).

D-l *Th. Angheluţă:* Proprietatea bisectoarei se poate extinde, probabil, şi în spaţiu. Ar trebui

considerat un tetraedru şi planul bisector al unuia din diedrele sale. El e tăiat de tetraedru după un triunghiu. *Aria acestui triunghiu este mai mică decât semisuma ariilor celor două feţe adiacente.*

D-l *N. Abramescu:* Să verificăm mai întâi ce se întâmplă cu planul median, care trece printr'o muchie şi prin mijlocul muchiei opuse.

Cele trei triunghiuri au aceiaş bază (muchia comună), iar înălţimile lor sunt distanţele de la cele două vârfuri ale muchiei opuse şi de la mijlocul muchiei opuse, la baza comună.

Să luăm atunci ca Ox baza comună; fie (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) coordonatele vârfurilor opuse,

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \frac{z_1 + z_2}{2}$$

coordonatele mijlocului muchiei opuse. Proprietatea ce vrem să stabilim revine la inegalitatea

$$\sqrt{y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{y_2^2 + z_2^2} > \sqrt{(y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}$$

adică, ridicând la patrat şi făcând reducerile:

$$\sqrt{y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{y_2^2 + z_2^2} > y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

Dar aceasta e evident în baza relaţiei lui *Lagrange,*

$$(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 = (y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2) - (y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 .$$

Deci proprietatea D-lui *Angheluţă* e adevărată pentru planul median.

D-l *D. V. Ionescu:* Acest lucru se poate dovedi geometric imediat Fie (fig. 3) piramida S A B C; M mijlocul lui B C. Construim prisma triunghiulară A B C S B′ C′ şi fie M′ mijlocul lui B′ C′.

Triunghiurile S A B, S A M, S A C sunt respectiv jumătăţile paralelogramelor S A B B′, S A M M′, S A C C′. Chestia revine deci la a dovedi că S A M M′ e mai mică decât semisuma lui S A B B′ şi S A C C′.

Să considerăm un plan perpendicular în A″ pe S A, care tae pe B B′, M M′, C C′ respectiv în B″, M″, C″. M″ e la mijlocul lui B″ C″, căci M M′ uneşte mijloacele laturilor paralele B C şi B′ C′ din paralelogramul B C B′ C′. Deci A″ M″ e mediană în triunghiul A″ B″ C″ şi avem conform celor spuse mai sus:

$$A'' M'' < \frac{A'' B'' + A'' C''}{2} .$$

Pe de altă parte:

$$\text{aria } S A B B' = A S \times A'' B'',$$

$$\text{aria } S A M M' = A S \times A'' M'',$$

$$\text{aria } S A C C' = A S \times A'' C''.$$

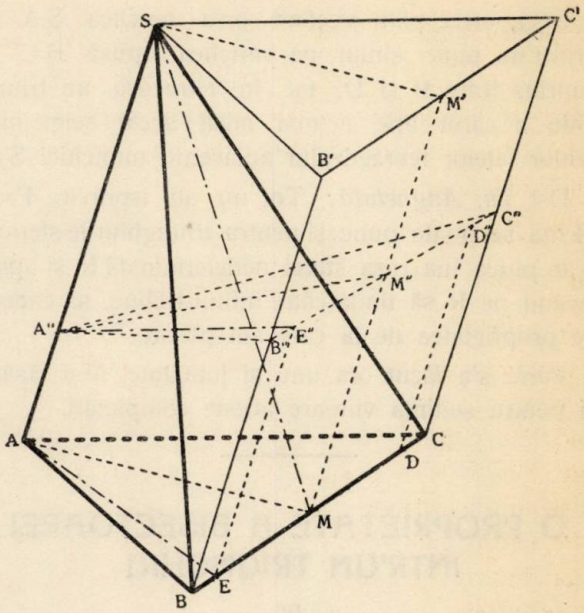


Fig. 3.

Ca atare:

$$\text{aria } S A M M' < \frac{\text{aria } S A B B' + \text{aria } S A C C'}{2}$$

şi în definitiv aria triunghiului determinat în tetraedru, de planul ce trece printr'o muchie şi prin mijlocul muchiei opuse, e mai mică decât semisuma ariilor feţelor adiacente din tetraedru.

D-l *G. Bratu*: Dar atunci şi problema D-lui *Angheluţă* e rezolvată. În adevăr, planul bisector al diedrului cu muchia S A tae planul de secţiune dreaptă A″ B″ C″ după bisectoarea A″ E″ a unghiului B″ A″ C″ şi avem, în baza teoremii D-lui *Pompeiu:*

$$A'' E'' < \frac{A'' B'' + A'' C''}{2}$$

adică, dacă E e punctul în care muchia B C înţeapă planul bisector al diedrului B S A C, avem:

$$\text{aria } S A E < \frac{\text{aria } S A B + \text{aria } S A C}{2} .$$

Ceva mai mult, fie D″ punctul unic în care cercul de centru A″ şi de rază $\frac{A'' B'' + A'' C''}{2}$ tae

segmentul $B''C''$. Presupunându-l pentru fixarea ideilor, $A''B'' < A''C''$, avem pentru orice punct P'' situat între B'' şi D''

$$2A''P'' < A''B'' + A''C''$$

Deci, orice plan trecând prin muchea SA şi printr'un punct situat pe muchea opusă BC şi cuprins între B şi D, tae în tetraedru un triunghiu a cărui arie e mai mică decât semisuma ariilor feţelor tebraedrului adiacente munchiei SA.

D-l *Th. Angheluţă:* Tot nu aţi isprăvit. Problema se poate pune şi pentru triunghiurile sferice. S'ar putea lua raza sferei nedeterminată R şi apoi, făcând pe R să tindă către infinit trebue, să cădem pe proprietatea de la care am plecat.

Voci: s'a făcut ora unu şi jumătate. Mai lăsăm şi pentru şedinţa viitoare aceste completări.

O PROPRIETATE A BISECTOAREI ÎNTR'UN TRIUNGHIU

DE

O. N. ŢINO

Luând cunoştinţă, prin amabilitatea colegului meu *Prof. V. Alaci,* de chestia propusă şi discutată în una din şedinţele seminariului secţiei matematice dela Facultatea de Ştiinţe Cluj, cu sediul actual în oraşul nostru, anume de a demonstra pe cale elementară că, *bisectoarea unghiului unui triunghiu este mai mică ca media aritmetică a laturilor adiacente ei,* mi-am propus şi găsit o atare soluţie elementară, *care diferind,* după cum am constatat ulterior, de cele date în şedinţa Seminarului, pomenită mai sus, mi-am permis să o dau aci la iveală. Acest lucru l-am făcut mai cu seamă că, demonstraţia dată aci, atrage atenţia asupra unei sume de proprietăţi *de poziţie* şi în legătură cu ele, de proprietăţi de limite geometrice.

1. In cazul când triunghiul este isoscel, proprietatea de limită enunţată pentru bisectoarea adiacentă laturilor egale este evidentă, de oarece ea coincide în acest caz cu înălţimea şi mediana adiacentă ei Proprietatea mai este însă evidentă şi în cazul *când bisectoarea este mai mică de cât cea mai mică din laturile adiacente ei.*

a. Să arătăm că *sunt triunghiuri în care bisectoarea unui unghiu este mai mică decât cea mai mică din laturile adiacente ei.*

Să plecăm dela triunghiul isoscel BAC ($\overline{AB} = \overline{AC}$); înălţimea $\overline{AH}$ este bisectoarea unghiului $\overline{BAC}$. Ducem între AC şi AH, ceviana AC' astfel ca $\sphericalangle C'AC$ să fie egal cu $\frac{1}{n} \sphericalangle BAC$; şi fie $\overline{AI}$ bisectoarea unghiului BAC'. Avem în primul rând: $\sphericalangle BAI < \sphericalangle BAH$ (căci $\sphericalangle BAC'$ este $<$ ca $\sphericalangle BAC$); apoi:

$$\sphericalangle IAH = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC - \frac{1}{2} \sphericalangle BAC' = \frac{1}{2} \sphericalangle C'AC,$$

deci

$$\sphericalangle IAH = \frac{1}{2n} \sphericalangle BAC.$$

De altă parte, observăm că:

$$\sphericalangle AIC' = \sphericalangle ABC + [\frac{1}{2} \sphericalangle BAC - \frac{1}{2n} \sphericalangle BAC] =$$

$$\sphericalangle ABC + \frac{n-1}{2n} \sphericalangle BAC,$$

iar

$$\sphericalangle AC'I = \sphericalangle ABC + \frac{1}{2} \sphericalangle BAC,$$

deci

$$\sphericalangle AIC' - \sphericalangle AC'I = \frac{n-3}{2n} \sphericalangle BAC.$$

Pentru $2 < n < 3$, avem

$$\sphericalangle AIC' < \sphericalangle AC'I, \text{ deci } \overline{AI} > \overline{AC'};$$

Pentru $n = 3$, avem

$$\sphericalangle AIC' = \sphericalangle AC'I, \text{ deci } \overline{AI} = \overline{AC'};$$

Pentru $n > 3$, avem

$$\sphericalangle AIC' > \sphericalangle AC'I, \text{ deci } \overline{AI} < \overline{AC'}.$$

Aşadar, *sunt triunghiuri în care bisectoarea unui unghiu este mai mică decât cea mai mică din laturile adiacente ei,* dar sunt şi triunghiuri unde această condiţie nu este îndeplinită (lucru care se putea vedea şi pe calea continuităţii), deci demonstrarea proprietăţii propuse este necesară.

2. Intr'un triunghiu, înălţimea unui vârf, determinat de laturi neegale, este cuprinsă între latura cea mai mică adiacentă ei şi bisectoarea adiacentă.

Fie triunghiul ABC ($\overline{AC} < \overline{AB}$); AI bisectoarea unghiului BAC; $\overline{AH}$ înălţimea vârfului A.

Dacă unghiul C ($>$B) este unghiu drept sau obtuz, proprietatea enunțată aci se schimbă în una evidentă, latura AC, în acest caz, fiind după ipoteza generală mai mică decât bisectoarea $\overline{AI}$, este cuprinsă între înălțimea $\overline{AH}$ și bisectoare $\overline{AI}$.

Să presupunem deci $\hat{C} < 90^0$. Avem în acest caz:

$$\sphericalangle IAC = \frac{1}{2}\sphericalangle A = 90^0 - \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} > 90^0 - \frac{2\hat{C}}{2} = \sphericalangle HAC,$$

(având $\hat{C} > \hat{B}$), din care rezultă proprietatea enunțată.

3. Intr'un triunghiu, mediana corespunzătoare unui vârf, determinat de laturi neegale, formează cu laturile adiacente unghiuri neegale, unghiul cel mai mare formându-l cu latura cea mai mică.

Fie triunghiul BAC ($\overline{AB} > \overline{AC}$) și $\overline{AM}$ mediana lui. Prelungim mediana $\overline{AM}$ cu segmentul $\overline{MA'} = \overline{AM}$, construind astfel paralelogramul BACA', deci $\overline{CA'}$ egal și paralel cu $\overline{AB}$ și asemenea $\sphericalangle BAM = \sphericalangle AA'C$. In triunghiul ACA', având $\overline{AC} < \overline{A'C}$, rezultă că $\sphericalangle CAA' > \sphericalangle AA'C$, sau încă că: $\sphericalangle CAM > \sphericalangle BAM$.

Consecința I-a. Având $\sphericalangle CAM > \sphericalangle BAM$, deducem că:

$$2\sphericalangle CAM > \sphericalangle BAM + \sphericalangle CAM = \sphericalangle BAC,$$

sau încă

$$\sphericalangle MAC > \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle IAC.$$

Așadar, *într'un triunghiu, bisectoarea unui unghiu determinat de laturi neegale este cuprinsă între mediana adiacentă ei și cea mai mică dintre laturile adiacente ei.*

Consecința II-a. Apropiind proprietatea precedentă de cea dela *2*, rezultă că: *Intr'un triunghiu, bisectoarea unui unghiu determinat de laturi neegale, este cuprinsă între mediana adiacentă ei și înălțimea adiacentă ei.*

Consecința III. *Intr'un triunghiu oarecare, bisectoarea unui unghiu este mai mică sau cel mult egală cu mediana adiacentă ei.*

Consecința IV-a. *Mediana unui triunghiu oarecare fiind mai mică decât media aritmetică a laturilor adiacente, rezultă, pe baza consecinței precedente, proprietatea enunțată pentru bisectoare.*

Consecința V-a. Media aritmetică a două laturi ale unui triunghiu este limită superioară pentru lungimea oricărei ceviene adiacente, cuprinsă între mediană și simetrica acestei mediane în raport cu înălțimea adiacentă.

Proprietatea nu este deci caracteristică pentru bisectoare.

4. Observăm că *teorema lui* **Stewart**, dă pentru proprietatea metrică a bisectoarei AI a triunghiului BAC, relația:

$$\overline{AI}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AC} - \overline{IB}\cdot\overline{IC}.$$

Neglijând scăzătorul IB.IC, care nu poate fi niciodată *nul*, căpătăm pentru lungimea bisectoarei o *limită superioară*, care nu poate fi niciodată atinsă pentru un triunghiu propriu zis; rezultă anume că:

$$\overline{AI} < \sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AC}},$$

adică *bisectoarea unghiului unui triunghiu este mai mică decât media geometrică a laturilor adiacente.*

Cum este cunoscut că *media geometrică* a două lungimi este mai mică sau cel mult egală (în cazul lungimilor egale) cu *media aritmetică* a acelor lungimi, rezultă că *limita superioară* găsită aci pentru lungimea bisectoarei, *este mai bună* de cât cea propusă pentru demonstrare.

5. Iată însă o demonstrație directă a proprietății de mai sus, care pune mai bine în evidență cazul limită.

Fie triungniul BAC ($\overline{AC} < \overline{AB}$) și bisectoarea $\overline{AI}$ a lui. Ducem paralele la $\overline{AI}$ prin B și C, care taie respectiv prelungirile lui CA și BA în B' și C'. Fie I' punctul unde B'C' taie prelungirea lui IA.

Diagonalele trapezului BCC'B' formând cu cele două baze paralele triunghiuri isoscele, rezultă că trapezul B'CC'B' este isoscel, deci că punctele B, C, C', B' sunt pe un cerc al cărui centru O este pe bisectoarea unghiului BAB'. Coarda $\overline{DD'}$, pe care o taie cercul O pe dreapta II', este deci perpendiculară pe un diametru al cercului O, deci $\overline{AD} = \overline{DA'}$ și avem proprietatea metrică

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AC'},$$

dar $\overline{AC'} = \overline{AC}$, iar $\overline{AD} > \overline{AI}$, deci

$$\overline{AI}^2 < \overline{AD}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AC}$$

$$\boxed{\overline{AI} < \sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}}\ .$$

Lăsăm corespondenților revistei noastre preocuparea de a extinde în spațiu proprietățile de poziție și de limită date mai sus; precum și preocuparea de a găsi pentru lungimile medianei și bisectoarei (în ipoteza că laturile adiacente nu sunt egale) limite inferioare.

NOTE MATEMATICE

17. — *Integrarea ecuației diferențiale de primul ordin,* $y' + py = q$, de *B. I. Baidaff*[1]).

In ecuația scrisă, p și q sunt funcțiuni de variabila independentă x.

Scriem p sub forma

$$p = \frac{h'}{h}$$

și obținem

$$h = e^{\int p\,dx}$$

și aceasta ne permite a scrie ecuația diferențială din enunț astfel

$$hy' + h'y = hq, \quad \text{sau} \quad (hy)' = hq$$

De aci deducem

$$hy = \int hq\,dx, \quad \text{deci} \quad y = h^{-1}\int hq\,dx.$$

Aplicație. Ecuația;

$$y' + xy = x^2,$$

conduce la

$$h = e^{\int x\,dx} = e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \text{deci} \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}\int x^2 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Buenos Aires 3 III, 1941.

18. — *Sur le système diophantique*

$$px^2 + qx'^2 + rx''^2 = py^2 + qy'^2 + ry''^2 =$$
$$pz^2 + qz'^2 + rz''^2 = u^3,$$

p, q, r étant des entiérs donnés.

Voici des formules de résolution pour ce système:

$$\begin{cases} x = f(pf^2 + qg^2 - 3rh^2) \\ x' = g(pf^2 + qg^2 - 3rh^2) \\ x'' = h(3pf^2 + 3qg^2 - rh^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f(-pf^2 + 3qg^2 + 3rh^2) \\ y' = g(-3pf^2 + qg^2 + rh^2), \\ y'' = h(-3pf^2 + qg^2 + rh^2) \end{cases} \quad u = pf^2 + qg^2 + rh^2.$$

$$\begin{cases} z = f(pf^2 - 3qg^2 + rh^2) \\ z' = g(3pf^2 - qg^2 + 3rh^2) \\ z'' = h(pf^2 - 3qg^2 + rh^2). \end{cases}$$

Exemples numériques.

p	q	r	f	g	h	
3	2	1	1	2	3	$\rightarrow 3.16^2 + 2.32^2 + 72^2 =$
						$3.48^2 + 2.16^2 + 24^2 =$
						$3.12^2 + 2.56^2 + 36^2 = 20^3$
1	1	1	1	2	4	$\rightarrow 43^2 + 86^2 + 4^2 =$
						$59^2 + 34^2 + 68^2 =$
						$5^2 + 94^2 + 20^2 = 21^3.$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

[1]) Traducere din limba spaniolă, din *Boletin Matematico*, Anul XIV, April 1941, Buenos Aires

Redacția.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVI, No. 12, August 1941. Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plautius Andronescu*. Asupra unui contur poligonal în legătură cu un triunghiu, de *Virgil Ghițescu*. Generalizarea teoremei *Droz-Farny*, de Ing. *Ion Vasiliu*. Raport pentru decernarea premiului *„Spiru Haret"*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Boletin Matematico*, Anul XIV, No. 8, Iunie 1941, *Buenos-Aires*. Asupra unui exercițiu de derivare, de *J. P. Staricco*. Extensiunea formulei mediei a lui *M. Bonnet*, de *A. Gloden*. Probleme rezolvate și propuse.

3. *Revista*, vol. II, No. 1. (Universitatea Națională din *La Plata*, Aprilie 1941. (Conține articole de fizică).

4. *P. Sergescu*. Quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France. (Monografie, Secțiunea de matematică a Universității din Cluj).

5. *Radu Bădescu*. Asupra unei integrale ce intervine în mișcarea tautocronă. (Extras din „R. M. T.", Anul XXI, No. 6).

6. *Radu Bădescu* Sur une extension des théorèmes de *Fredholm*. (Extrait du T. XXVII, Année 1941, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 98. — *Să se găsească două forţe concurente, cunoscându-se proecţiile rezultantei lor pe două axe rectangulare, precum şi raportul lor, egal cu k.*

DILI C. SCHILERU

Cunoscând proecţiile R_1 şi R_2 ale forţelor, obţinem rezultanta $R = AB$ în mărime şi direcţie. Rezultanta şi cele două componente determină un triunghiu în care cunoaştem o latură precum şi raportul celorlalte două, date insuficiente pentru rezolvarea triunghiului, deci problema are o infinitate de soluţii.

Vârful al treilea se găseşte pe cercul descris pe $A'B'$ ca diametru, A', B' fiind punctele cari împart, interior şi exterior, segmentul AB în raportul dat k.

Notă. 1°. Au rezolvat bine problema, găsind şi cercul de mai sus, Dnii *Bredan C* şi *Şerbănescu I.*

2°. Au arătat că geometric problema are o infinitate de soluţii, fără a găsi cercul de mai sus, Dnii: *Dinulescu N., Iliescu I., Măru D, Tărăbuţă P.*

3°. Soluţii trigonometrice au trimis Dnii: *Biernaschi C., Negulescu E, Samovici I.*

M. G.

Problema 100. — *Fie* P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, ... P_1 *personagiile unei piese de teatru, în ordinea importanţei lor. In timpul reprezentaţiei, se zice că scena se schimbă oridecâteori se schimbă personagiile. Considerând că* P_n *este personagiul principal şi că în piesa care se joacă sunt combinate toate scenele diferite care se pot face şi aşa fel ca o aceiaş scenă să nu se mai repete, iar un personagiu oarecare* P_k *să intre numai în scene cu cel mult* $k+1$ *personagii dintre* $k+1$ *personagii principale (numai personagiul principal* P_n *putând rămâne şi singur) se cere a se determina numărul personagiilor din această piesă, ştiind că în mijlociu o scenă a durat 3 minute şi că reprezentaţia totală, exceptând pauzele, a fost de 2 ore şi 45 minute.*

GR. ZAPAN

1°. Soluţie dată de D-nii *Katz P.* şi *Măru D.* Din enunţ se vede că au fost 55 scene. Să evaluăm altfel numărul scenelor, în funcţie de numărul personagiilor n. Pentru aceasta, observăm că în conformitate cu enunţul, personagiul P_k face toate conbinaţiile posibile de scene cu cele $n-k$ personagii dinaintea lui jucând cu câte unul, două, etc. personagii; în total va face deci

$$s_k = C_{n-k}^1 + \ldots + C_{n-k}^{n-k} = 2^{n-k} - 1$$

scene. Numărul total de scene va fi deci

$$N = \sum_1^n s_k = \sum_1^n 2^{n-k} - n = 2^n - n = 55,$$

din care rezultă imediat $n = 9$, adică nouă personagii.

2°. *Soluţia autorului.* De oarece personagiul principal P_n figurează în toate scenele, îl vom urmări pe acesta. In acest scop, observăm că el intră:

a. Singur, deci o scenă;

b. cu fiecare personagiu câte odată, deci C_{n-1}^1 scene;

c. cu câte două personagii diferite, afară de P_1, deci C_{n-2}^2 scene;

d. cu câte trei personagii diferite afară de P_1 şi P_2, deci C_{n-3}^3 scene, etc...

In total P_n ia parte la

$$N = 1 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots$$

scene. Insă, dacă u_n este termenul de rangul n din şirul lui *Fibonacci* se are $N \equiv u_n$ (*Zapan Gh.* „Gazeta Matematică", vol. XXIV, pag. 184), unde $u_1 = 1$, u_2, $u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$, găsim imediat $55 = u_9$, astfel că $n = 9$.

Notă. Zapan Gh., autorul problemei, afirmă că a enunţat schema ideală după care se tinde a se construi o operă dramatică, exprimându-şi, cu drept cuvânt, mirarea că într'o astfel de chestiune intervine şirul lui *Fibonacci.* Noi nu credem însă practică o astfel de schemă, căci o piesă în care personagiul principal nu părăseşte scena este monotonă până la un punct pentru spectatori.

M. G.

Problema 141. — *De vârfurile unei plăci triunghiulare se atârnă greutăţi proporţionale cu laturile triunghiului său ortic. Din ce punct trebue să suspendăm placa printr'un fir, pentru ca placa să fie orizontală în poziţia de echilibru?*

E. ABASOHN

Această problemă a mai fost propusă, de acelaş autor, în *„Gazeta Matematică"* sub No. 2507, vol. XXII, pag. 168 şi rezolvată în vol. XXIII, pag. 68.

1. Au trimis soluţii la această problemă: D-nii *Adam M, Goldstein I, Longin Ionescu, Lupescu C., Mocanu A,*

Niculescu A., Popoviciu T, Rizescu I., Dili C. Schileru, Theodoru N., Winkler A.

2. Au arătat că problema s'a propus în *Gazetă* d-nii: † *Botea N*, *Coşereanu I., Ioneseu-Brezuica I., Katz P.*

3. D. *Popovici I Th.* a copiat vorbă, cu vorbă, cele două soluţii date în „Gazeta Matematică".

M. G.

Problema 164. — *Să se afle limita expresiei*

$$y = (a + b\,c^{\sec x})^{\pi - 2x},$$

unde $c > 1$, *pentru* $x = \frac{1}{2}\pi$.

N. CIORANESCU

Soluţia. Deosebim două cazuri, după cum x tinde către $\frac{1}{2}\pi$ prin valori descrescătoare sau crescătoare.

1°. Fie: $x = \frac{1}{2}\pi + \alpha\ (\alpha > 0)$.

Cum, $\sec x = \dfrac{1}{\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha)} = -\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

vom avea

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi} y = \lim_{\alpha=0} (a + b\,c^{-\frac{1}{\sin\alpha}})^{-2\alpha} = a^0 = 1,$$

deoarece c, fiind supra unitar, ridicat la puteri negative din ce în ce mai mari tinde către zero.

2°. Fie: $x = \frac{1}{2}\pi - \alpha\ (\alpha > 0)$. De data aceasta c este ridicat la puteri din ce în ce mai mari pozitive, deci tinde către infinit. Avem deaface cu forma nedeterminată ∞^0. Pentru a o ridica aplicăm regula lui *Hôspital* lui $\log y$. Avem

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi} (\log y) = \lim_{\alpha=0} 2\alpha \,.\, \log(a + b\,c^{\frac{1}{\sin\alpha}}) =$$

$$2 \lim_{\alpha=0} \frac{\log(a + b\,c^{\frac{1}{\sin\alpha}})}{\frac{1}{\alpha}} = 2 \lim_{\alpha=0} \frac{-b\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\,c^{\frac{1}{\sin\alpha}} \log c}{a + b\,c^{\frac{1}{\sin\alpha}}} \Big/ \frac{1}{\alpha^2}$$

$$= 2\log c \,.\, \lim_{\alpha=0} \frac{b\,c^{\frac{1}{\sin\alpha}}}{a + b\,c^{\frac{1}{\sin\alpha}}} \cdot \frac{\alpha^2}{\sin^2\alpha} \cos\alpha = 2\log c,$$

deoarece

$$\lim_{\alpha=0} \frac{b\,c^{\frac{1}{\sin\alpha}}}{a + b\,c^{\frac{1}{\sin\alpha}}} = \lim_{\alpha=0} \frac{b}{a\,c^{-\frac{1}{\sin\alpha}} + b} = \frac{b}{b} = 1,$$

pentru acelaşi motiv ca la 1° şi

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

În concluzie

$$\lim_{x=\frac{1}{2}\pi} (\log y) = 2\log c \quad *), \quad \lim_{x=\frac{1}{2}\pi} y = c^2.$$

Observare. S'au primit mai multe soluţii greşite.

Problema 259. — *Un punct greu căzând pe verticală, parcurge înălţimea unui stâlp de telegraf, paralel cu verticala sa de cădere şi înalt de 10 m., în un sfert de secundă. Să se afle înălţimea dela care punctul a fost lăsat să cadă fără viteză.*

V. VALCOVICI

Fie h înălţimea totală dela care cade punctul; viteza iniţială fiind nulă, vom avea

$$h = \frac{g t^2}{2}, \quad h - 10 = \frac{g}{2}\left(t - \frac{1}{4}\right)^2,$$

din care deducem, prin scădere,

$$t = \frac{320 + g}{8g}, \qquad (g = 9{,}8).$$

Inlocuind în prima din relaţiile de mai sus, găsim

$$h = \frac{(320 + g)^2}{128\,g} = 86{,}70 \text{ m., aprox.}$$

Notă. Au trimis soluţii cu rezultat apropiat, D-nii: *Bărglăzan A., Berdan C, Bobârnac M., Flickstein J., Gradin Gh, Manolescu N, Mihaileanu N., Isaia Niculescu-Mizil, R. Şeptilici-Comăneşti, Stamatiu M, Süli M, Tauber A., Vătăşan O, Zarda I*, Ceilalţi au scos $v = 40'$.

M. G.

Problema 1586. — *Să se formeze un patrat perfect de şapte cifre, întrebuinţând odată cifra 8 şi de câte două ori fiecare din cifrele 2, 3, 9.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D. *Modâlcă Emil.* Fie N patratul căutat. De oarece

$$2233899 < N^2 < 9983322,$$

rezultă $1491 < N < 3159$.

Pe de altă parte, date fiind cifrele lui N^2, rezultă după articolul D-lui *I. V. Mătieş*, din *„Gazeta Matematică"*, vol. 37. pag. 368, că N^2 se poate termina:

1°. cu 289, deci $N = 250n \pm 17$;

2°. cu 329, deci $N = 250n \pm 73$;

3°. cu 929, deci $N = 250n \pm 77$;

4°. cu 989, deci $N = 500n \pm 228$.

Să le examinăm pe rând, observând că N se divide cu 3, de oarece $2+2+3+3+8+9+9=M9$.

1°. In acest caz, $2339289 < N^2 < 9332289$, deci $1529 \leq N \leq 3054$; $N = 250n \pm 17$ arată că $7 \leq n < 12$. Divizibilitatea lui N prin 3 arată că putem lua $n = 7, 8, 10, 11$, deci N = 1767, 1983, 2517, 2733, dintre care 1983 dă soluție căci

$$1983^2 = 3932289$$

2°. In acest caz, $2389329 < N^2 < 9832329$, deci $1545 \leq N \leq 3135$; $N = 250n \pm 73$ arată că $6 \leq n \leq 12$, deci $n = 7, 8, 10, 11$ cu numerele N = 1677, 2073, 2427, 2823, cari nu dau soluții.

3°. In acest caz, $2338929 < N^2 < 8332929$, deci $1528 \leq N \leq 2886$; $N = 250n \pm 77$ arată că $6 \leq n \leq 12$, deci $n = 7, 8, 10, 11$, cu numerele N = 1827, 1923, 2577, 2673, cari nu dau soluție.

4°. Acest caz nu există, căci dacă $N = 500n \pm 228$, N^2 nu se termină cu 9. Dealtfel, din Nota 8 a D-lui *Gl. Gh. Buicliu* din *„Gazeta Matematică“* vol. 33, p. 137, se vede că 989 nu este terminație de patrat perfect.

Singura soluție a problemei este dar numărul $1983^2 = 3932289$.

Altă soluție. Dacă nu se cunoaște nici un articol, Notă, etc. conținând table de patrate sau terminațiuni de patrate, se poate rezolva problema în felul următor:

Fie $N = 1000a + 100b + 10c + d$,

deci

$$N^2 = 1.000.000a^2 + 100.000(2ab) + 10.000(b^2 + 2ac) + 1000(2ad + 2bc) + 100(c^2 + 2bd) + 10(2cd) + d^2.$$

Vom determina pe a, b, c, d astfel ca N^2 să aibă cifrele date. Se vede imediat că N^2 se termină cu 9, deci $d = 3$ sau 7.

Să examinăm cazul $d = 3$. Cifra zecilor lui N^2 este cifra unităților lui $2cd = 6c$, deci putem avea $c = 2, 3, 7, 8$.

Dacă $c = 2$, cifra sutelor lui N^2 se obține din cifra zecilor lui $2cd = 12$, din cifra unităților lui $c^2 + 2bd = 4 + 6b$, adică este cifra unităților lui $5 + 6b$, care cere $b = 3, 4, 8, 9$.

Cifra miilor lui N^2 se obține din cifra unităților lui $2ad + 2bc = 6a + 4b$, cifra zecilor lui $c^2 + 2bd = 6a + 21$ și din ce a rămas la adunarea sutelor, dacă a rămas. Dacă $b = 3$, va fi cifra unităților din $6a + 12 + 2$, deci $a = 3, 4, 8, 9$, dar din numerele N = 3323, 4323, 8323, 9323, nici unul nu este soluție. Dacă $b = 4$, va fi cifra unităților din $6a + 16 + 21$, deci $a = 5, 8$, ceiace duce la N = 5423, 9423, cari nu dau soluție. Dacă $b = 8$, va fi cifra unităților din $6a + 32 + 5$, deci $a = 1, 2, 6, 7$, ceiace duce la N = 1823, 2823, 6823, 7823, cari nu dau soluție. In fine, dacă $b = 9$, va fi cifra unităților din $6a + 36 + 5$, deci $a = 2, 3, 7, 8$, ceiace duce la N = 2923, 3923, 7923, 8923, cari nu dau soluție. Micșorăm încă numărul încercărilor; observând că N trebue să se dividă cu 3 La fel tratăm celelalte cazuri

Notă. Am ajuns la acelaș rezultat, prin mai multe încercări, D-nii: *Dăscălescu Hr., Moldovanu C., Reischer H., Solomon I, Tilică Ștefan.*

M. G.

Problema 1666. — *După un număr de două cifre se scrie dublul său, apoi triplul acestuia din urmă și se obține un patrat perfect de șapte cifre. Care este acel patrat?*

G-L GH. BUICLIU

1. *Prima soluție*, dată de D-nii *Stamate Ionel* și *Anițescu N.* Fie N numărul de două cifre, iar P patratul de șapte cifre, căutate. N având două cifre, 2N are tot două cifre, altfel 6N având cel puțin trei cifre, P^2 are cel puțin opt cifre, contrar enunțului. Deci $10 < N < 50$. 6N având trei cifre, urmează $N > 16$, deci $16 < N < 50$. Fie $N = 10a + b$. P^2 fiind cu soț și terminându-se cu aceiași cifră ca $6b$, urmează $b = 4, 5, 6$, $b = 0$ nefiind soluție. Deci singurele valori posibile pentru N sunt:

24, 25, 26; 34, 35, 36; 44, 45, 46.

Vom avea pentru 6N, numerile

144, 150, 156; 204, 210 216; 264, 270 276.

Din acestea, numai

144, 156, 204, 204, 215, 264, 276

pot (ultimele trei cifre) da patrat perfect.[1] Formând numerele P^2 corespunzătoare, constatăm că nici unul nu este patrat perfect, deci problema nu are soluție.

2°. *A doua soluție*, dată de d-nii *Cetățeanu Șt.* și *Modâlcă E.* Ca mai sus, conchidem că 2 N are două cifre. Putem deci scrie

$$N \cdot 10^5 + 2N \cdot 10^3 + 6N = P^2$$

sau

$$102.006\ N = P^2$$

Însă $102.006 = 2.3^3 \cdot 1889$, ceia ce cere $N = 2.3.1889\ k^2$ număr ce are mai mult ca două cifre.

3°. D-ra *Papadopol Elena* a interpretat enunțul în sensul că P^2 are *șase* cifre și a găsit $P^2 = 142884 = 378^2$.

PROBLEME PROPUSE

1970. — Să se găsească trei cifre cu care să se formeze un număr de două cifre și patratul de patru cifre al acestuia.

G-L GH. BUICLIU

1971. — Să se găsească patratele de patru cifre $\overline{a\,b\,c\,d} = (\overline{x\,y})^2$, fiind dat $\overline{c\,d} = \overline{x\,y} + \frac{\overline{x\,y}}{n}$, n fiind întreg.

V THÉBAULT

1972. — Să se găsească soluțiile sistemului diofantian,

$$\begin{cases} x^3 + p\,x\,y + q\,y^2 = u^3 \\ x + r\,y = v^3. \end{cases}$$

A. GLODEN

1973. — Se dă sistemul:

$$\begin{cases} h\,x^2 + \mu\,y\sqrt{x\,y} = m \\ \mu\,y^2 + h\,x\sqrt{x\,y} = p. \end{cases}$$

1°. Să se rezolve acest sistem, h, μ, m, p fiind dați.

2°. Să se găsească relațiile între parametri dați, în caz când sistemul ar fi imposibil.

3°. Caz particular: $h = 8$, $\mu = 27$, $m = 3$, $p = 2$.

ILIE D. LOZICIU

1974. — Ce relație există între laturile unui triunghiu, în care centrul cercului înscris împarte una din bisectoare în raportul m. În ce caz această proprietate subzistă pentru toate bisectoarele?

EMILIAN MEREUTA

1975. — Pe dreapta O B se iau segmentele $OP_1 < OP_2$. Se descriu cercurile de diametre OP_1, OP_2 și se duce o secantă O A care taie în A_1 și A_2, respectiv, aceste cercuri. Se ia pe O A un punct A_3 și se duc dreptele A_3P_1, A_3P_2.

Apoi, din A_2 se duce o paralelă la A_3P_1, care întâlnește pe O B în Q.

Să se arate că paralela dusă prin A_1 la A_3P_2 trece prin punctul Q.

V. ALACI

1976. — Fie A B C D un patrulater înscris în cercul O și M mijlocul celei de a treia diagonale E F. Paralele duse prin centrele cercurilor A O C și B O D la A C și B D se întâlnesc în punctul P. Dreapta care unește punctul P cu centrul radical al cercurilor ce au centrele în E, F trecând prin O și cercul O, este perpendiculară pe O M.

TEODOR GH. COCEA

1977. — Mai multe proectile lovesc un avion în același timp. Dacă în afară de momentul izbirei, a mai fost un moment când proectilele s'au găsit în un același plan, atunci pe tot timpul traectului, proectilele au fost complanare. Se consideră avionul punctual ca și proectile, iar traectoriile în vid.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU

[1]) Gl. *Gh. Buiclíu* „Gazeta Matematică", vol. XXXIII, pag. 138.

M. G

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Becu Crum. (1836, 1890, 1902, 1903, 1906); *Bakonyi C.* (1767, 1869, 1870 1877, 1878, 1885, 1899, 1902, 1903, 1904, 1906, 1911, 1914, 1915. 1916, 1918, 1931); *Boerescu G. P.* (N.); *Boleanţu Lazăr.* (1891, 1895, 1896, 1899, 1903, 1916); *Filip Gh. Petre* (1931, 1956); *Goga I. Florian* (N., P, 1764, 1836, 1848, 1854, 1856. 1878, 1887, 1891, 1892, 1895, 1899, 1902, 1916, 1918, 1927, 1934, 1947, 1956). *Ieşan Şt. Alexandru.* (1931, 1938, 1956). *Ionescu F. Petre.* (1554, 1659, 1674, 1681, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1830, 1842, 1851, 1854, 1858, 1866, 1875, 1883, 1884, 1888, 1891, 1894, 1899, 1902, 1904, 1907, 1931, 1938, 1946, 1947, 1948, 1949, 1956); *Mahrenholz Johannes.* (A., 1932, 1933, 1934, 1936, 1941, 1943, 1944, 1949); *Manolache C. Mircea.* (P., 1955, 1956); *Negrea A. Mircea.* (1782, 1884, 1879, 1887, 1888, 1895, 1896, 1902, 1904, 1905, 1928, 1936); *Sabău Mihaiu.* (Problemele trimise fiind pe foi în continuare, este rugat a le trimite din nou, fie care pe foi separate); *Sârbu A. Emil.* (1956, 1967).

INFORMAŢIUNI

Anunţăm cu părere de rău încetarea din viaţă a profesorului GHEORGHE BRATU de la Facultatea de Ştiinţe Cluj, membru activ al „Revistei Matematice" din Timişoara şi a Societăţii Ştiinţifice a Politehnicei din Timişoara.

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Fiecare problemă rezolvată trebue să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XX, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 12 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

ANUL XXI OCTOMVRIE 1941 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **NICOLAE ABRAMESCU**: ASUPRA RELATIEI DINTRE INVOLUTIE SI FASCICOLE DE CERCURI.
2. **M. GHERMANESCU**: O CLASA DE CONICE ATASATE UNUI TRIUNGHIU.
3. NOTE MATEMATICE: 19, 20.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 230, 1202, 1126, 1610, 1626, 1629, 1669, 1674.
6. PROBLEME PROPUSE: 1978-1985.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Școala Politechnică, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XXI, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XX inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XXI — No. 8 TIMISOARA, OCTOMVRIE 1941

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

ASUPRA RELAȚIEI DINTRE INVOLUȚIE ȘI FASCICOLE DE CERCURI

DE

NICOLAE ABRAMESCU.

Resumé. On expose géométriquement la rélation entre l'involution sur une droite et les faisceaux de cercles et on fait une application à la situation des points dont les abscisses sont données par les équations

$$\lambda^2 + 2a\lambda + k^2 \pm \alpha(\lambda^2 + 2b\lambda + k^2) = 0.$$

1 **Involuție pe o dreaptă** [1]. Să considerăm un *fascicol de cercuri* (fig. 1), care au axa radicală P Q. Să le tăiem cu o dreaptă L în punctele A și A′, B și B′, . . . , și fie O punctul unde P Q taie pe L. Puterea lui O față de aceste cercuri este O P . O Q și avem

$$O A . O A' = O B . O B' = \cdots O P \; O Q = \text{const.}$$

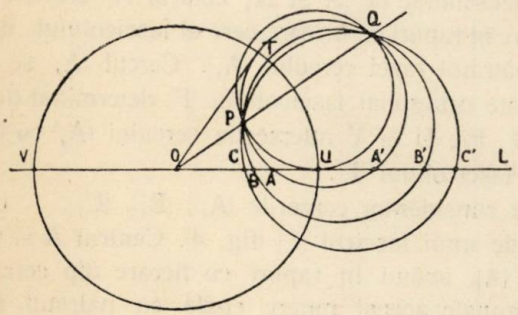


Fig. 1.

[1]) Pentru desvoltări, să se vază *G. Papelier, Exercices de Géométrie moderne*, t, I—IX, *Géométrie dirigée, Transversales, Division et faisceaux harmoniques, Pol, polaires, plans polaires, Rapport anharmonique, Inversion, Homographie, Involution, Géométrie projective, application aux coniques; G. Țițeica, Un mod de a determina o involuție* (*Gazeta Mat*, vol. VIII, p. 7); *A. Myller, O proprietate a conicei contravariante unei perechi de conice și generalizare în geometria riglată* (Gaz. Mat, vol. XXIV, p. 51); *N. Abramescu, Asupra involuției determinată pe o dreaptă de un fascicol punctual de conice* (Gaz. Mat, vol. XXVII, p 386); *N. Abramescu, Lecțiuni de Geometrie Analitică* (Editura Universității Cluj, ediția II).

Punctele (A, A′), (B, B′), . . . , ale dreptei I, care verifică relația

$$O A . O A' = O B . O B' = \cdots k = \text{const.}$$

se zice că *formează o involuție pe dreapta* L, *cu punctul central* O, *cu puterea de involuție* k, iar L se zice baza involuției.

2. **Două perechi de puncte determină o involuție.** Fie (A, A′, (B, B′) cele două perechi de puncte pe L (fig 1). Două cercuri oarecare trecând unul prin A și A′, altul prin B și B′, se taie în P și Q, iar dreapta P Q taie baza L în punctul central O. Punctul corespunzător unui punct C al dreptei L este intersecția C′ a dreptei L cu cercul C P Q.

Printre cercurile fascicolului, care au axa radicală P Q (care trec prin punctele P și Q), sunt două tangente în U și V la dreapta L. Punctele U și V sunt intersecțiile dreptei L cu cercul descris din O ca centru și cu raza egală cu tangenta O T dusă din O la cercul A P Q A′, de ex. În U și V se confundă câte o pereche de puncte (A, A′) ale involuției, de aceea U și V se zic *punctele duble ale involuției.*

3. **Relația dintre punctele duble ale involuției și cele două categorii de fascicole de cercuri.** Sunt două categorii de fascicole de cercuri, după cum cercurile nu taie axa radicală (fig. 2), sau taie axa radicală în P și Q (fig. 3).

1° În primul caz (fig. 2) (A A′), (B B′) fiind cele două cercuri, se construește axa lor radicală, care taie în O linia centrelor. Această axă radicală se construește ducând un cerc ales astfel ca să taie cercurile (A A′), (B B′). Punctul ω de intersecție al celor două coarde comune, axele radicale ale cercului luat cu fiecare din cercurile (A A′), (B B′), este centrul radical al celor trei cercuri. Perpendiculara

din ω, pe linia L a centrelor, este axa radicală a cercurilor (A A′), (B B′). Tangentele O T (fig. 2) din O la cercurile de diametru A A′, B B′ sunt egale cu puterea lui O față de aceste cercuri. Cercul cu raza O T taie linia centrelor în U și V și cercul de diametru U V taie ortogonal cercurile fascicolului.

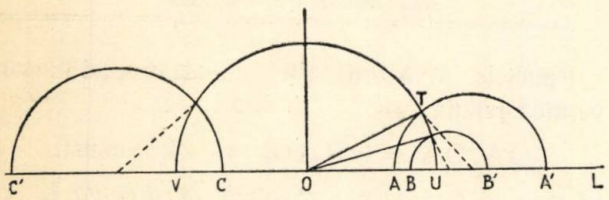


Fig 2.

Un cerc oarecare al fascicolului se construește ducând o tangentă T M (fig. 2) la cercul de diametru U V, care taie linia centrelor în M. Cercul cu centrul în M și raza M T este un cerc al fascicolului, care taie linia centrelor în A și A′. Când T este în U, atunci T M = 0, cercul fascicolului se reduce la punctul U. Punctele U și V se zic *punctele limită ale fascicolului.*

Cercul de diametru U V taie ortogonal cercurile fascicolului de diametre (A A′), . . . , și avem

$$O A . O A' = \overline{O T}^2, \quad O A . O A' = \overline{O U}^2 .$$

Această relație arată că punctele U și V separă armonic segmentul A A′, căci O este mijlocul lui U V. Avem

$$O A . O A' = O B . O B' = \cdots = \overline{O U}^2 = \text{const.},$$

deci punctele (A, A′), (B, B′), . . . *formează pe* L o *involuție cu punctul central* O, *exterior perechilor de puncte* (A, A′), . . . , *cu punctele duble* U *și* V, *care separă armonic perechile de puncte ale involuției.*

2° În cazul când axa radicală taie cercurile în P și Q (fig. 3), fie O punctul de intersecție al acestei axe cu linia centrelor. Avem

$$O A . O A' = O B . O B' = \cdots = O P . O Q = \text{const.}$$

Unghiurile A O A′, B O B′, . . . sunt drepte. Deci, pentru a obține un cerc (C C′) al fascicolului, rotim în jurul lui P un unghiu drept cu vârful în P. Punctele (A, A′), (B, B′), . . . determină pe linia centrelor L o involuție, cu punctul central O interior perechilor de puncte. Punctele duble ale involuției de pe linia centrelor sunt imaginare. P și Q se zic *puncte fundamentale.*

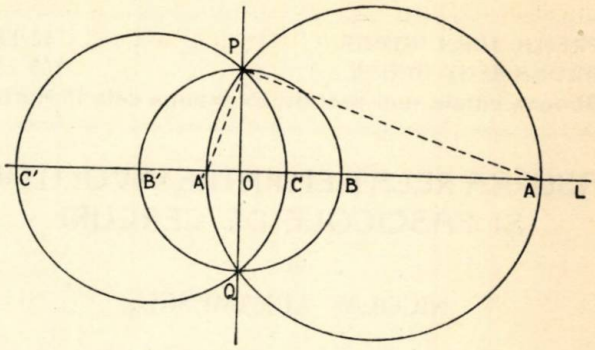


Fig. 3.

4. Exemplu de cele două categorii de involuție. Fascicole conjugate. Să considerăm un cerc (A_1) (fig. 4), care taie ortogonal două cercuri date (A) și (B). Tangentele $A_1 T$, $A_1 T'$ duse din centrul A_1 al cercului (A_1) la cercurile (A) și (B) sunt egale cu raza cercului A_1 și cu puterea lui A_1 față de (A) și (B). Deci, locul centrelor A_1 ale cercurilor care taie ortogonal două cercuri, este axa radicală a cercurilor (A) și (B), și această axă radicală fiind comună la toate cercurile fascicolului determinat de (A) și (B), centrul A_1 are aceeași putere în raport cu oricare cerc al fascicolului, egală cu pătratul razei cercului (A_1). Cercul (A_1) se zice că este ortogonal fascicolului (F) determinat de (A) și (B). Fie U și V intersecția cercului (A_1) cu baza L a fascicolului (F).

Să considerăm cercurile (A_1), (B_1), (C_1), . . . ortogonale unui fascicol (F) (fig. 4). Centrul A al unui cerc (A), având în raport cu fiecare din cercurile ortogonale aceași putere egală cu patratul razei sale, aparține la axa radicală a două oarecare din aceste cercuri ortogonale. De asemenea, pentru centrele cercurilor (B), (C), . . . Deci, cercurile (A_1), (B_1), (C_1), . . . au ca axă radicală comună baza L a fascicolului (F), toate cercurile (A_1), (B_1), (C_1), . . . trec prin U și V, formează un fascicol (F_1). Fascicolele (F) și (F_1) sunt astfel că baza unuia este axa radicală a celuilalt, au bazele L și L_1 perpendiculare și același punct central O, care este intersecția dreptelor L și L_1. Punctele U și V sunt punctele

mită pentru fascicolul (F) şi puncte fundamentale pentru fascicolul (F_1). Fascicolul (F) determină pe baza L o involuţie cu punctele duble U şi V, iar fascicolul (F_1) determină pe baza L_1 o involuţie cu punctele duble imaginare, cu punctele fundamentale U şi V. *Fascicolele* (F) şi (F_1) se zic *conjugate.*

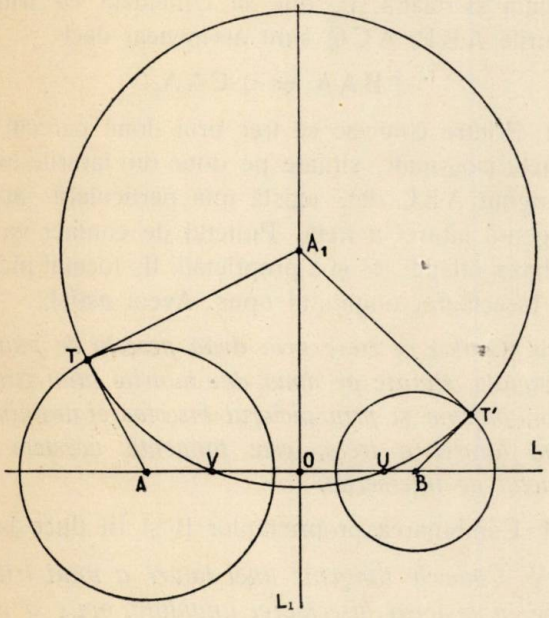


Fig. 4

5. **Aplicaţie.** Axa radicală a cercurilor

$$x^2+y^2+2ax+c=0, \quad x^2+y^2+2bx+c=0,$$

cu centrele pe axa Ox, se obţine scăzând aceste ecuaţii, şi este $2(a-b)x=0$, sau $x=0$, adică axa Oy. Fascicolul determinat de aceste cercuri are ecuaţia

$$x^2+y^2+2ax+c+\lambda(x^2+y^2+2bx+c)=0$$

şi punctele de intersecţie ale acestor cercuri cu axa Oy se obţin făcând $x=0$ şi sunt date de $y^2+c=0$.

Deci, dacă $c>0$, cercurile nu taie axa Oy, axa lor radicală (fig. 2). Punctele lor de intersecţie cu Ox sunt date de

$$x^2+2ax+c+\lambda(x^2+2bx+c)=0,$$

sau

$$x^2+2\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}x+c=0.$$

Însemnând cu M′, M″ punctele unde unul din cercurile fascicolului taie axa Ox, avem

$$OM'=x', \quad OM''=x'', \quad OM'.OM''=c=\text{const.}>0.$$

Punctul O este exterior cercurilor fascicolului, perechile (M′, M″) formează o involuţie pe axa Ox, linia centrelor.

Dacă $c<0$, cercurile fascicolului taie axa Oy (axa radicală) în P şi Q (fig. 3). Punctele de intersecţie cu linia centrelor verifică relaţia

$$OM'.OM''=c<0,$$

formează o involuţie, puterea originii în raport cu aceste cercuri este $c<0$, adică O este interior cercurilor fascicolului.

Să considerăm cercurile

$$(M)\equiv x^2+y^2+2ax+k^2+\alpha(x^2+y^2+2bx+k^2)=0,$$
$$(N)\equiv x^2+y^2+2ax+k^2-\alpha(x^2+y^2+2bx+k^2)=0,$$

ale fascicolului determinat de cercurile

$$(A)\equiv x^2+y^2+2ax+k^2=0,$$
$$(B)\equiv x^2+y^2+2bx+k^2=0.$$

Abscisele centrelor M şi N ale acestor cercuri sunt

$$\frac{a+\alpha b}{1+\alpha}, \qquad \frac{a-\alpha b}{1-\alpha}, \qquad \alpha=\frac{AM}{MB},$$

care probează că M şi N separă armonic centrele A şi B. Deci, când A este dat, corespunzător unei valori date lui α, atunci conjugatul său armonic B se poate construi. Centrele M şi N ale cercurilor (M) şi (N) (fig. 2) fiind cunoscute, aceste cercuri se pot (Nr. 3) construi.

Punctele lor de intersecţie M′, M″ şi N′, N″ cu axa Ox sunt date de ecuaţiile

$$x^2+2ax+k^2+\alpha(x^2+2bx+k^2)=0,$$
$$x^2+2ax+k^2-\alpha(x^2+2bx+k^2)=0.$$

Rezultă că aceste puncte corespund intersecţiei liniei centrelor A şi B a cercurilor (A) şi (B), cu două cercuri (M) şi (N) ale fascicolului determinat de cercurile (A) şi (B) şi astfel ca centrele lor M şi N să separe armonic punctele A şi B [2].

---

[2]) Acesta a fost obiectul problemei 92 din Revista Matematică din Timişoara, care astfel se consideră rezolvată.

O CLASĂ DE CONICE ATAȘATE UNUI TRIUNGHIU

DE

M. GHERMĂNESCU

În una din ședințele cu caracter elementar ale Seminarului de Matematici al Facultății de Științe, prezidate de D-l Prof. *D. Pompeiu,* s'a discutat o anumită proprietate a perechilor de puncte isogonale. Cu această ocazie, am semnalat o proprietate pe care o dau mai jos.

1. Fie (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) trei perechi de puncte isogonale situate, câte una, pe laturile unui triunghiu ABC. Avem proprietatea imediată, care ne face să bănuim că poate este cunoscută:

I. *Trei perechi de puncte isogonale arbitrare, situate câte una pe laturile unui triunghiu, sunt așezate pe o conică.*

În adevăr, o cunoscută proprietate (teorema lui *Steiner,* Culegere *Țițeica,* Cap. IX, Ex. 28, pag. 46) ne dă

$$(1) \qquad \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2},$$

precum și relațiuni analoage pentru perechile (B_1, B_2), (C_1, C_2). Deducem

$$(2) \qquad \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{B_2C}{B_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{C_2A}{C_2B} = 1,$$

deci punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sunt situate pe o aceiaș conică în baza unei teoreme a lui *Lazare Carnot.*

Proprietatea precedentă admite o reciprocă interesantă, care se enunță astfel:

II. *Conicele ce trec prin două perechi de puncte isogonale, situate pe două din laturile unui triunghiu* ABC, *întâlnesc latura a treia în două puncte care sunt de asemeni isogonale.*

Căci din (2) și din cele două relații (1) corespunzătoare celor două perechi de puncte isogonale date, rezultă relația (1) pentru intersecția cu latura a treia a triunghiului, relație care caracterizează punctele isogonale, în baza reciprocii teoremei citate a lui *Steiner.*

Această reciprocă nu se găsește enunțată sau demonstrată la locul citat mai sus, dar cred că este cunoscută, căci făcând construcția indicată la pag. 153,

$$CQ \parallel AB, \qquad BP \parallel AC,$$

P fiind pe AA_1, iar Q pe AA_2, triunghiurile asemenea

$$BPA_1, \ ACA_1; \qquad CQA_2, \ ABA_2,$$

precum și relația (1), duc la concluzia că triunghiurile ABP, ACQ sunt asemenea, deci

$$\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle CAA_2.$$

3. Printre conicele ce trec prin două perechi de puncte isogonale, situate pe două din laturile unui triunghiu ABC dat, există una particulară, aceia tangentă laturei a treia. Punctul de contact va fi, în baza relației (1) și a proprietății II, tocmai piciorul bisectoarei unghiului opus. Avem astfel:

III. *Conica ce trece prin două perechi de puncte isogonale, situate pe două din laturile unui triunghiu, precum și prin piciorul bisectoarei unghiului opus laturei a treia, este tangentă acesteia în punctul de intersecție.*

4. Combinarea proprietăților II și III duce la:

IV. *Conicele tangente unei laturi a unui triunghiu în piciorul bisectoarei unghiului opus și care tae o altă latură a triunghiului în două puncte isogonale, va tăia a treia latură tot în două puncte isogonale.*

De aci rezultă imediat:

V. *Conicele tangente la două laturi ale unui triunghiu în picioarele bisectoarelor unghiurilor opuse, întâlnesc latura a treia în două puncte isogonale.*

NOTE MATEMATICE

18. — *Egalités multigrades vraies aux degrés 1,3 ou 2,4.*

A. J'ai donné dans le Bol. Mat. (Buenos Aires) un procédé donnant les solutions rationnelles du système diophantien

$$x-3, \ x-1, \ x+1, \ x+3 \overset{1,3}{=}$$
$$y-3, \ y-1, \ y+1, \ y+3, \ z.$$

De chaque solution rationnelle fractionnaire on peut déduire une solution entière. La raison de

la progression aritmétique devient 10 au lieu de 2. Dans certains cas, tous les termes étant multiples de 2, la raison de la progression devient, après division par 2, l'unité.

Ci-après quelques solutions numériques en termes tous positifs:

									S_1	S_3
5,	7,	9,	11, $\overset{1,3}{=}$	2,	4,	6,	8,	12	32	2.528
22,	24,	26,	28, $\overset{1,3}{=}$	13,	15,	17,	19,	36	100	64.000
48,	58,	68,	78, $\overset{1,3}{=}$	25,	35,	45,	55,	92	252	1.094 688
65,	75,	85,	95, $\overset{1,3}{=}$	36,	46,	56,	66,	116	320	2.168.000
117,	119,	121,	123, $\overset{1,3}{=}$	74,	76,	78,	80,	172	480	6.919.200
184,	186,	188,	190, $\overset{1,3}{=}$	117,	119,	121,	123,	268	748	26.168.032
286,	287,	288,	289, $\overset{1,3}{=}$	183,	184,	185,	186,	412	1.150	95.059.000
393,	895,	897,	899, $\overset{1,3}{=}$	572,	574,	576,	578,	1284	3.584	2.877.346.304
1830,	1840,	1850,	1860, $\overset{1,3}{=}$	1169,	1179,	1189,	1199,	2644	7.380	25.124.472.000
2752,	2754,	2756,	2758, $\overset{1,3}{=}$	1765,	1767,	1769,	1771,	3948	11.020	83 642.210.800
8825,	8835,	8845,	8855, $\overset{1,3}{=}$	5658,	5668,	5678,	5688,	12668	35.360	...000

Je signale les 2 chaînes qu'on déduit des solutions précédentes:

117, 119, 121, 123 $\overset{,3}{=}$ 74, 76,78, 80, 172 $\overset{1,3}{=}$ 184, 186, 188, 190, (−268), 572, 574, 576, 578 $\overset{1,3}{=}$ 366, 368, 370, 372, 824 $\overset{1,3}{=}$ 893, 895, 897, 899, (−1284.

B. De chacune des multigrades précèdentes j'en déduis une de la forme

$$A_1, A_2, A_3 \overset{2,4}{=} B_1, B_2, B_3,$$

à l'aide du théorème:

De $a_1 \dots a_p \overset{x}{=} b_1, \dots b_q$, *vraie pour* $x = 1,3 \dots 2n-1$, *on déduit, quelle que soit t,*

$$a_1+t, \dots \quad a_p+t, \quad -b_1+t, \dots \quad -b_q+t \overset{y}{=}$$
$$-a_1+t, \dots \quad -a_p+t, \quad b_1+t, \dots \quad b_q+t,$$

vraie pour $y = 2,4 \dots 2n$.

En choisissant pour t la moitié de la raison de la progression arithmétique formée par un quadruplet de termes dans chacune des multigrades vraies pour les valeurs 1 et 3 de l'exposant, le nombre de termes par membre se réduit à 3 dans chacune des nouvelles multigrades vraies pour les valeurs 2 et 4

Exemples:

						S_2	S_4
1,	11,	12 $\overset{2,4}{=}$	4,	9,	13	266	35.378
12,	29,	35 $\overset{2,4}{=}$	20,	21,	37	2.210	2.228.642
20,	83,	87 $\overset{2,4}{=}$	43,	60,	97	14.858	104.908.082
31,	100,	111 $\overset{2,4}{=}$	60,	71,	121	23.282	252.730.562
73,	124,	171 $\overset{2,4}{=}$	81,	116,	173	49.946	1.119.855.698
116,	191,	267 $\overset{2,4}{=}$	124,	183,	269	121.226	6 594.048.818
365,	579,	823 $\overset{2,4}{=}$	373,	571,	825	1.145.795	.. 947
571,	900,	1283 $\overset{,4}{=}$	579,	892,	1285	2.782.130	...602
1164,	1865,	2639 $\overset{2,4}{=}$	1204,	1825,	2649	11.797.442	...482
1764,	2759,	3947 $\overset{2,4}{=}$	1772,	2751,	3949	26.302.586	.. 458
5653,	8860,	12663 $\overset{2,4}{=}$	5693,	8820,	12673	270.807.578	...042

A. GLODEN
(LUXEMBURG)

19. — *Einige Zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate.*

I. In der „Revista Matematică din Timişoara", vom November 1940, Seite 109, finden sich 3-gliederige Ketten von mehrgradigen Gleichungen (égalités multigrades), gültig für die Exponenten 2 und 4, und Ketten von mehrgradigen Gleichungen, gültig für die Exponenten $1, 2, \ldots, 7$. Ich will hier eine generelle Methode angeben, um 4-gliederige Ketten von beliebigen Identitäten zu bilden.

Gilt die Relation

$$A_1, A_2, \ldots, A_r \overset{n}{=} B_1, B_2, B_3, \ldots, B_r,$$

dann gilt für *beliebiges* x und y die Identität

$$x A_1, x A_2, x A_3, \ldots, x A_r, y B_1, y B_2, y B_3, \ldots, y B_r \overset{n}{=}$$

$$x A_1, x A_2, x A_3, \ldots, x A_r, y A_1, y A_2, y A_3, \ldots, y A_r \overset{n}{=}$$

$$x B_1, x B_2, x B_3, \ldots, x B_r, y B_1, y B_2, y B_3, \ldots, y B_r \overset{n}{=}$$

$$y A_1, y A_2, x A_3, \ldots, y A_r, x B_1, x B_2, x B_3, \ldots, x B_r$$

für *beliebige* n.

Reduziert man diese Identitätsketten auf 3 Glieder, so lassen sich bei passender Wahl von x und y Zahlen streichen.

Exempel: Aus $1, 9, 10 \overset{n}{=} 5, 6, 11$ für $n = 2,4$ ergibt $x = 1$, $y = 2$ die Identitätskette

$$\underset{\alpha}{1, 9, 10}, \underset{\beta}{10, 12, 22} \overset{n}{=} 1, 9, 10, 2, 18, 20 \overset{n}{=}$$

$$5, 6, 11, \underset{\gamma}{10, 12, 22} \overset{n}{=} 2, 18, 20, \underset{\delta}{5, 6, 11}. \qquad (n = 2, 4)$$

Die Glieder α, β, γ haben die Nombre 10 gemeinsam, also gilt

$$1, 9, 10, 12, 22 \overset{n}{=} 1, 9, 2, 18, 20 \overset{n}{=} 5, 6, 11, 12, 22.$$

Anderes Exempel: Die relation

$$1, 13, 17, 23 \overset{n}{=} 3, 9, 21, 21$$

für $n = 1, 3, 5$ führt bei $x = 1$, $y = 3$ zu

$$1, 13, 17, 23, 9, 27, 63, 63 \overset{n}{=} 1, 13, 17, 23, 3, 39, 51, 69 \overset{n}{=}$$

$$3, 9, 21, 21, 9, 27, 63, 63 \overset{n}{=} 3, 39, 51, 69, 3, 9, 21, 21$$

für $n = 1, 3, 5$.

II. Eine ähnliche Methode, wie die Methode unter I führt die Relation

$$\begin{cases} A^2 + 2B = C^2 + 2D \\ A^2 \,.\, B^2 = C^2 \,.\, D^2 \end{cases}$$

zu Identitäten von der Form

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_6 \overset{\pm}{=} R_1, R_2, R_3, \ldots, R_6 \overset{\pm}{=}$$

$$U_1, U_2, \ldots, U_6, \overset{\pm}{=} V_1, V_2, V_3, \ldots, V_6.$$

NB. Das Symbol $\overset{\pm}{=}$ bedeutet Summen- und Produktengleichheit. So bedeutet

$$25, 12, 12 \overset{\pm}{=} 9, 20, 20$$

das System

$$\begin{cases} 25 + 12 + 12 = 9 + 20 + 20 \\ 25 \,.\, 12 \,.\, 12 = 9 \,.\, 20 \,.\, 20. \end{cases}$$

Exempel: Aus $3^2, 2, 2 \overset{\pm}{=} 1^2, 6, 6$ bekommen wir die viergliedrige Kette

$$18, 4, 4, 3, 18, 18 \overset{\pm}{=} 2, 12, 12, 6, 6, 27 \overset{\pm}{=}$$

$$4, 4, 18, 6, 6, 27 \overset{\pm}{=} 2, 12, 12, 3, 18, 18,$$

wo sich in jeder Identitätsseite als Summe 65 und als Produkt 6^7 ergibt.

III. Durch Untersuchung einer Serie von simultanen Identitäten, fand ich 3 neue Resultate.

1. Aus $1, 9, 10 \overset{n}{=} 5, 6, 11$ für $n = 2, 4$ ergibt sich

(α) $1, 2, 10, 12, 20, 21 \overset{5}{=} 0, 5, 6, 16, 17, 22$.

Gilt die Relation

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \overset{n}{=} b_1, b_2, \ldots, b_r$$

für die n ersten Potenzgrade, dann gilt für beliebiges h die Identität

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1 + h, b_2 + h, \ldots, b_r + h \overset{n+1}{=}$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_r, a_1 + h, a_2 + h, \ldots, a_r + h$$

für die $(n + 1)$ ersten Potenzgrade. Wir wenden dies Theorem auf die Identität (α) an und setzen $h = 11$; dies ergibt

$$(\beta) \qquad \begin{matrix} 1, 2, 10, 11, 20, 27, 28, 33 \overset{6}{=} \\ 0, 5, 6, 13, 22, 23, 31, 32; \end{matrix}$$

daraus ergibt $h = 9$ die Identität

$$(\gamma) \qquad \begin{matrix} 1, 2, 9, 14, 15, 27, 28, 33, 40, 41 \overset{7}{=} \\ 0, 5, 6, 13, 19, 23, 29, 36, 37, 42; \end{matrix}$$

daraus ergibt $h = 13$ die Identität

(δ) $\begin{matrix}1,\ 2,\ 9,\ 18,\ 26,\ 32,\ 33,\ 49,\ 50,\ 55\\ 0,\ 5,\ 6,\ 22,\ 23,\ 29,\ 37,\ 46,\ 53,\ 54;\end{matrix}$ ^{8}

daraus ergibt $h=17$ die Identität

(ε) $\begin{matrix}1,\ 2,\ 9,\ 17,\ 32,\ 33,\ 39,\ 40,\ 55,\ 63,\ 70,\ 71\\ 0,\ 5,\ 6,\ 19,\ 29,\ 35,\ 37,\ 43,\ 53,\ 66,\ 67,\ 72;\end{matrix}$ ^{9}

daraus ergibt die gliedweise Subtraktion von 36 das Resultat

(ξ) $3,\ 4,\ 19,\ 27,\ 34,\ 35 \overset{n}{=} 1,\ 7,\ 17,\ 30,\ 31,\ 36$

für $n=1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8.$

2. Wir setzen $h=1$ bei Relation (1α) und bekommen

(β) $0, 3, 5, 11, 13, 16, 22, 22 \overset{6}{=} 1, 1, 7, 0, 12, 18, 20, 23;$

$h=11$ gibt daraus

(γ) $\begin{matrix}0,\ 3,\ 5,\ 12,\ 13,\ 21,\ 22,\ 29,\ 31,\ 34\\ 1,\ 1,\ 7,\ 10,\ 14,\ 20,\ 24,\ 27,\ 33,\ 33;\end{matrix}$ ^{7}

$h=9$ gibt daraus

(δ) $\begin{matrix}0,3,5,10,13,16,19,23,29,29,34,36,42,42\\ 1,1,7,\ 9,14,14,20,24,27,30,33,38,40,43;\end{matrix}$ ^{8}

$h=13$ gibt daraus

(ε) $\begin{matrix}0,3,5,10,19,22,27,29,34,37,46,51,53,56\\ 1,1,7,\ 9,18,24,26,30,32,38,47,49,55,55.\end{matrix}$ ^{9}

Gliedweise Subtraktion von 28 führt daraus zu

(ξ) $1, 6, 9, 18, 23, 25, 28 \overset{n}{=} 2, 4, 10, 19, 21, 27, 27$

$(n=1, 2, 4, 6, 8).$

3. Wir führen die Relation

$$43,\ 47,\ 81 \overset{n}{=} 23,\ 69,\ 73$$

für $n=2,$ über in

(α) $0, 17, 19, 62, 64, 81 \overset{5}{=} 4, 6, 29, 52, 75, 77;$

$h=2$ führt zu

(β) $\begin{matrix}0,\ 8,\ 17,\ 31,\ 54,\ 62,\ 79,\ 81\\ 2,\ 4,\ 21,\ 29,\ 52,\ 66,\ 75,\ 83;\end{matrix}$ ^{6}

$h=23$ führt zu

(γ) $\begin{matrix}0,\ 8,\ 17,\ 25,\ 27,\ 44,\ 62,\ 79,\ 81,\ 89,\ 98,\ 106\\ 2,\ 4,\ 21,\ 23,\ 29,\ 40,\ 66,\ 77,\ 83,\ 85,\ 102,\ 104;\end{matrix}$ ^{7}

$h=17$ führt zu

(δ) $\begin{matrix}0,8,19,27,38,46,57,62,81,89,94,100,119,121\\ 2,4,23,29,34,42,61,66,77,85,96,104,115,123;\end{matrix}$ ^{8}

$h=19$ führt zu

(ε) $\begin{matrix}0,\ 8,\ 21,\ 48,\ 53,\ 62,\ 80,\ 89,\ 94,\ 121,\ 134,\ 142\\ 2,\ 4,\ 29,\ 34,\ 65,\ 66,\ 76,\ 77,\ 108,\ 113,\ 138,\ 140;\end{matrix}$ ^{9}

Diese Identität ist identisch mit

(ξ) $9, 18, 23, 50, 63, 71 \overset{n}{=} 5, 6, 37, 42, 67, 69;$

$(n=2, 4, 6, 8).$

4 Interessant ist, dass zu dem Resultate (2ξ) auch die Relation

$$15,\ 19,\ 31 \overset{n}{=} 9,\ 25,\ 29$$

für $n=2,4$ führt.

IV. 1. Wir bilden aus der Formel

$$[(a+b)(2a-b)],\ [b(3a+b)] \overset{n}{=}$$
$$[(a-b)(a+2b)],\ [-a(a-3b)],\ [2(a^2+b^2)]$$

für $n=1,3$ Lösungen zu (2) E F, G $\overset{n}{=}$ H, I, K für $n=2, 4,$ wo $E<F<G,$ ferner $H<I<K$ und $E+F\neq G$ sowie $H+I\neq K$ ist.

3. Die Formel unter (1) liefert Lösungen zu

$x, y \overset{n}{=} u, v\ w$ für $n=1, 3,$ wo $x-y=u-v.$

Ich gebe einige Zahlenbeispiele. Es ergibt sich

(α) $7, 9 \overset{n}{=} 2, 4, 10$ für $n=1,3$ aus $a=2,\ b=1;$

(β) $20, 22 \overset{n}{=} 7, 9, 26$ für $n=1,3$ aus $a=3,\ b=2;$

$\gamma)$ $5, 27 \overset{n}{=} (-8), 14, 26$ für $n=1,3$ aus $a=2,\ b=3;$

(δ) $35, 13 \overset{n}{=} 18, (-4), 34$ für $n=1,3$ aus $a=4,\ b=1.$

4. Gilt die Relation

$$d_1,\ d_2,\ d_3 \overset{n}{=} e_1,\ e_2,\ e_3$$

für $n=1, 3,$ dann gilt für beliebiges s die Identität

(α) $\begin{matrix}d_1-s,\ d_2-s,\ d_3-s,\ e_1+s,\ e_2+s, e_3+s\\ e_1-s,\ e_2-s,\ e_3-s,\ d_1+s,\ d_2+s, d_3+s\end{matrix} \overset{n}{=}$

für $n=2, 4$ Setzt man nun bei den aus Formel (1) sich ergebenden Resultaten

$$s=\frac{x+v}{2}=\frac{y+u}{2},$$

dann lassen sich bei der Identität (α) beiderseits 3 Glieder streichen und wir bekommen Lösungen zu (2), welche *eine* Basendifferenz auf *beiden* Seiten aufweisen und sich stets zu einer Lösung für

$$\sum_{i=1}^{6} L_i^n = \sum_{i=1}^{6} M_i^n$$

für $n=1, 2, 3, 4, 5,$ sowie für

$$\sum_{i=1} P_i^n = \sum_{i=1}^{8} N_i^n$$

für $n = 1, 2, \ldots, 6$ weiterführen lassen.

5. *Exempel:* Um ganze Zahlen zu bekommen, multiplizieren wir (3α) mit 2^n und bekommen

$$0,\ 14,\ 18 \overset{n}{=} 4,\ 8,\ 20$$

für $n = 1,3$. Es ergibt nun

$$s = \frac{14+8}{2} = \frac{18+4}{2} = 11$$

die Relation

$$(0-11), (14-11), (18-11), (11+4), (11+8), (11+20 \overset{n}{=}$$
$$(4-11), (8-11), (20-11), (0+11), (14+11), (18+11)$$

für $n = 2, 4$; also:

$$(-11), 3, 7, 15, 19, 31 \overset{n}{=} (-7), (-3), 9, 11, 25, 29$$

für $n = 2, 4$; also:

$$15, 19, 31 \overset{n}{=} 9, 25, 29 \text{ für } n = 2, 4.$$

In gleicher Weise entsteht

aus (3β): $43, 47, 81 \overset{n}{=} 23, 69, 73$ für $n = 2, 4$;

aus (3γ): $3, 47, 71 \overset{n}{=} 29, 43, 73$ für $n = 2, 4$;

aus (3δ): $23, 67, 99 \overset{n}{=} 37, 57, 101$ für $n = 2, 4$.

Die angegebenen Exempel für $E, F, G \overset{n}{=} H, I, K$ für $n = 2, 4$ bestehen *nur* aus *un*geraden Zahlen.

Interessant ist, dass $3, 8, 13 \overset{n}{=} 2, 10, 12$ für $n=1,3$ über $1, 6, 11, 16, 24, 26 \overset{4}{=} 2, 4, 12, 17, 22, 27$ auch zum Resultate $15, 19, 31 \overset{n}{=} 9, 25, 29$ für $n = 2,4$ führt.

6. Aus $7,8 \overset{n}{=} 1, 5, 9$ für $n = 1,3$ gibt

$$s = \frac{0+9}{2} = \frac{8+1}{2}$$

die Relation

$$5, 11, 19, 27 \overset{n}{=} 1, 9, 23, 25$$

für $n = 2,4$. Hieraus folgt

$$0, 8, 16, 22, 32, 38, 46, 54 \overset{5}{=} 2, 4, 18, 26, 28, 36, 50, 52;$$

also:

$$0, 4, 8, 11, 16, 19, 23, 27 \overset{5}{=} 1, 2, 9, 13, 14, 18, 25, 26;$$

$h = 4$ gibt daraus

$$0, 5, 6, 11, 16, 17, 19, 22, 29, 30 \overset{6}{=}$$
$$1, 2, 9, 12, 14, 15, 20, 25, 26, 31;$$

$h = 11$ gibt daraus

$$0, 5, 6, 13, 19, 23, 29, 36, 37, 42 \overset{7}{=}$$
$$1, 2, 9, 14, 15, 27, 28, 33, 40, 41;$$

$h = 13$ gibt daraus

$$0, 5, 6, 22, 23, 29, 37, 46, 53, 54 \overset{8}{=}$$
$$1, 2, 9, 18, 26, 32, 33, 49, 50, 55;$$

dies ist identisch mit

$$9, 11, 43, 45, 55 \overset{n}{=} 3, 19, 37, 51, 53$$

für $n = 1, 3, 5, 7$, was zum Endresultat von III (1) führt.

ALFRED MOESSNER
(ANSBACH)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVII, No. 1, Septemvrie 1941. Lista Membrilor Societății „G. M". Membri decedați. Premiile, bursele și publicațiile Societății „G. M". Raport pentru decernarea premiului „General *Sc. Panaitescu*. Note matematice, Probleme rezolvate și propuse.

2. *Boletin Matematico*, Anul XIV, No 9, Iulie 1941, *Buenos Aires. Carlos Federico Gauss*, de *D. E. Smith*, (tradus de *J. Gonzalez Galé*). O problemă instructivă a evoluentelor, de *B. I. Baidaff*. Două teoreme de geometria *n* dimensională și o formulă, de *B. I. Baidaff*. Asupra unor evoluente, de † *Gh. Țițeica*, (tradusă de B. I. B.) Inițieri la a 2-a parte al anului XIV, de *B. I. Baidaff*. Informații bibliografice,

3. *Buletinul Politehnicei din București*, Anul XII, 1941. Théorème de fermeture, par *Nicolas Racliș*, Sur les géodésiques de longueur nulle de certains éléments linéaires finslériens, par *N. Teodorescu*. Contribution à l'étude de la perspective aeronautique, par *Scarlat Fotino*. Une propriété des coniques, par *I. Cârstoiu*. Sur les paraboles inscrites à un triangle, par *Cesar Coșnița*. Quelques formules de moyenne et quelques inégalité entre les valeurs moyennes des fonctions monotones, par *N. Ciorănescu*. Quelques monogrammes à points alignés, pour la Technique de la combustion, par *A. Guțu*. Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications, par *Gr. C. Moisil*. Untersuchungen über einen wichtigen Fehler der Aerotriangulation, von *A. I. Corpacin*. Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant, par *Alex. Stoenescu*. Essai d'une théorie élémentaire des déformations et des effors intérieurs d'un fluide incompressible, par *D. Germani*. Sur le renversement de la force éléctromotrice du couple étain-fer dans les acides dilués, par *E. Toporescu*. Sur le dosage du zinc, par *C. Belcot*. Calcaires organogènes dans le bassin *Petroșeni*, par *Mircea D. Ilie* et *G. Manolescu* Recherches anatomiques sur les artéres, les veines et les conduits biliaires intrahépatiques chez le chat, par *Octave Vlăduțiu*. Die Beziehung zwischen dem Quellen und der Wasseraufnahme des Zementmörtels, von *C. C. Teodorescu*. Untersuchungen über die Eigenschaften einiger Betone für Meerwasserbauten, von *A. Steopoe*. Sur la signification et les applications des lois de *Kirchoff*, par *C. Budeanu*. Sur l'erreur relative dans la mesure de la résistance d'un galvanometre par la méthode du shunt, par *Vlad Rădulescu*. Erwärmungsberechnung elektrischer Kontakte, von *A. Avramescu*. Amplificateur pour communications téléphoniques, par *Matei Marinescu*. Dynamische Kennlien des C-Verstärkers, von *T. Tănăsescu*. Le calcul des tubes avec chemises amovibles, par *I. Linteș*. Einige anblicke der Rumänischen Landwirtschaft der Donauebene, von *N. Cor-*

năţeanu. Schlüssel zur Bestimmung der genetischen Bodentypen Rumäniens, von *C. Chiriţă.* Vers une architecture roumaine moderne, par *Toma Socolescu.*

4. *Pozitiva*, Anul II, No. 1, Septemvrie 1941. Teorema lui *Joachimstahl* şi problema desfăturatelor, de *D. Barbelian.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse

5. *P Sergescu.* Sur les combinaisons généralisées. (Extrait du Bulletin de la Section Scientifique, Académie Roumaine, T. XXIII, No. 10).

6. *P. Sergescu.* O oră de seminar matematic. (Extras din „R. M. T.", An. XXI, No. 7.

7. *Ion C Dumitriu.* Exerciţii şi probleme de *Algebră elementară*, pentru clasele IV, V şi VI de liceu. Este o culegere de Probleme îngrijită, priceput selectată şi de folos elevilor cărora se adresează şi cărora le-o recomandăm stăruitor.

8. *Ion C. Dumitriu.* De ce *Paştele ortodox* este, anul acesta, cu o săptămână în urma *Paştelor celorlalţi creştini* (194).

9. *Ion C. Dumitru.* De ce după *Crăciun* ziua creşte seara?

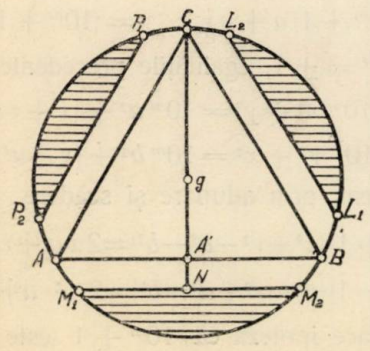
PROBLEME REZOLVATE

Problema 230. — *O placă circulară de rază R şi de greutate 30 kgr. este rezemată în trei puncte de pe cerc formând vârfurile unui triunghiu echilateral.*

Unde trebue să punem pe placă o greutate de 40 kgr. pentru ca aceasta să se răstoarne?

C. C. TEODORESCU

Fie A, B, C punctele de razim, g centrul de greutate al triunghiului A B C şi A′ mijlocul lui A B. Fie N un punct, exterior triunghiului A B C, în care punând greutatea de 40 kgr., avem echilibru şi x distanţa lui N la A B.



Pentru echilibru, momentul masei de 30 kgr. concentrate în g faţă de axa A B, trebue să egaleze momentul masei de 40 kgr. concentrate în N. Cu alte cuvinte, dacă R este raza cercului A B C, trebue ca

$$g\,A' \times 30 = \frac{R}{2} \cdot 30 = 40 \,.\, x$$

***

$$x = \frac{3\,R}{8} \,.$$

Rezultă că linia $M_1 M_2$ paralelă cu A B şi la distanţa $\frac{3\,R}{8}$ de A B este linia limită de echilibru. Procedând la fel cu celelalte laturi, se stabilesc liniile $L_1 L_2$ şi $P_1 P_2$ paralele cu celelalte laturi şi la distanţele $\frac{3\,R}{8}$ de ele. Ori unde s-ar aşeza greutatea de 40 kgr. în partea haşurată, placa circulară se va răsturna.

S-au primit bune soluţii analoage de la d-nii: *Bobârnac M., Bossie V., Botiş V., Constantinescu Gr. I, David I. I., Dimitriu M., Drăgan G. Gh, Georgescu Chiriac, Ioniţă M. I., Kassargian A, Miclescu Ad, Nicolae A., Percea Viorel Popescu Iancu, Popovici Th I, Solomon N, Stănculescu I. C, Tăraş V., Tomescu Gh.* şi *Vătăşan G. O*

G-l Gh. B.

Problema 1002. — *Fiind date punctele* A, B, C *în linie dreaptă, se duce tangenta* C T *la cercul de diametru* A B. *Cercul cu centrul* C *şi raza* C T *taie pe* A B *în* M *şi* N. *Să se arate că*

$$A\,M \,.\, A\,N = A\,B \;\; A\,C.$$

N. ABRAMESCU

1°. Avem

$$A\,M = A\,C - M\,C = A\,C - T\,C,$$

$$A\,N = A\,C + C\,N = A\,C + T\,C,$$

$$A\,M \,.\, A\,N = (A\,C - T\,C)\,(A\,C + T\,C),$$

$$A\,M \,.\, A\,N = \overline{A\,C}^2 - \overline{T\,C}^2. \tag{1}$$

Puterea punctului C faţă de cercul de diametru A B este

$$\overline{C\,T}^2 = C\,A \,.\, C\,B.$$

Inlocuind în (1) pe $\overline{C\,T}^2$, obţinem

$$A\,M \;\; A\,N = \overline{A\,C}^2 - A\,C \,.\, B\,C = A\,C\,(A\,C - B\,C),$$

$$A\,M \,.\, A\,N = A\,C \,.\, A\,B.$$

2°. Se poate observa că cercurile de diametre A B şi M N sunt ortogonale şi se ştie că diametrul A B al unuia este saparat armonic de celalt cerc, în M şi N. Deci

$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$, $2AM.AN = AB(AM + AN)$.

Dar

$AM = AC - MC$, $AN = AC + CN = AC + MC$.

Inlocuind, avem

$2AM.AN = AB(AC - MC + AC + MC)$,

$AM.AN = AB.AC$.

Au rezolvat problema d-nii: *Boeriu Valeriu, Coandă Virgil, Cosniță Cezar, Cojocariu V. I, Dan Traian, Ioanin Gheorghe, Ivănescu Cezar, Lățea Constantin, Margulius Marius, Matei Dumitru, Mecu Ilie, Mecu Mihail, Mehedinți D. Mereuță Emilian, Mihăileanu N., Negrea Mircea, Neufeld Pavel, Parapeanu C. I., Păsculescu Vasile, Popa B. Ion, Rogojan Alexandru, Roșca Gheorghe, Rusu Constantin, Savovici Florentin, Süli Mihai. Stoica Dumitru, Șerban Teodor, Sub-Lt Tica P. Marin-Gall, Tilică Ștefan, Trică Ioan, Trofin Corneliu, Zahab Nicolae.*

N. A.

Problema 1126. — *Se consideră trei puncte coliniare* A, B, C, *și un al patrulea punct* P *în planul lor. Fie* P_a, P_b, P_c *punctele diametral opuse lui* P *respectiv în cercurile* PBC, PCA, PAB. *Să se arate că punctele* P, P_a, P_b, P_c *sunt conciclice.*

CEZAR COSNITA

Soluție dată de D-l *Sub Lt. Sâmbotin Gh.* Se observă că dreptele PA, PB, PC sunt respectiv perpendiculare pe laturile triunghiului $P_a P_b P_c$. Deci punctele A, B, C sunt picioarele perpendicularelor din P pe laturile triunghiului $P_a P_b P_c$. Aceste puncte fiind pe dreapta ABC, rezultă că dreapta ABC este dreapta lui *Simson* a lui P, iar P este pe cercul $P_a P_b P_c$. Deci, punctele P, $P_a P_b P_c$ sunt conciclice (pe același cerc).

Se observă că centrele $O_a O_b O_c$ ale cercurilor PBC, PCA, PAB sunt pe același cerc cu punctul O.

D-l *Predoescu I. Marin* a dat o soluție analitică.

N. A.

Problema 1610. — *Să se demonstreze că* $\frac{n-1}{n}$ *și* $\frac{n-2}{n}$ *sunt singurele fracții de numitor n, egale cu rădăcina lor patrată cu o aproximație de* $\frac{1}{n}$.

G-L GH. BUICLIU.

Soluție dată de D. *Modâlcă E.* și *Lepolszky C.* Fie $\frac{a}{n}$ o astfel de fracție; avem

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 < \frac{a}{n} < \left(\frac{a+1}{n}\right)^2.$$

Prima neegalitate arată că $a < n$; punând $n = a + \alpha$, $\alpha > 0$, a doua devine

$$(a+1)^2 > a(a+\alpha)$$

de unde

$$\alpha > \frac{2a+1}{a} = 2 + \frac{1}{a}.$$

Dacă $a > 1$, α întreg nu poate fi decât 1 sau 2, deci $a = n - 1$ sau $n - 2$.

Dacă însă $a = 1$, luând $\alpha = 3$, neegalitatea a doua devine egalitate căci, $n = 3 + 1 = 4$,

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{2}{4}\right)^2.$$

D. *Tilică Șt.* a considerat cazul general al unei rădăcini de ordinul *m*.

M. G.

Problema 1626. — *Să se găsească două numere astfel ca patratele lor să fie respectiv de forma* ABB *și* BBA, *unde* A *și* B $(A < B)$ *sunt patrate de câte două cifre însemnătoare.*

LT M. GRUMAZESCU

Să considerăm cazul mai general când $A = x^2$ și $B = y^2$ au câte *m* cifre. Fie *u* și *v* numerele căutate; enunțul conduce la egalitățile

$$10^{2m} x^2 + (10^m + 1) y^2 = u^2,$$

$$10^{2m} (10^m + 1) y^2 + x^2 = v^2,$$

care arată că $u^2 - x^2$, $v^2 - x^2$ se divid prin $10^m + 1$. Să punem

$$u = (10^m + 1) a + \varepsilon x, \qquad v = (10^m + 1) b + \varepsilon' x,$$

unde $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$, egalitățile precedente devin

$$(1) \qquad 10^m x^2 + y^2 = 10^m a^2 + (x + \varepsilon a)^2,$$

$$(2) \qquad 10^m y^2 + x^2 = 10^m b^2 + (x + \varepsilon' b)^2.$$

Deducem, prin adunare și scădere

$$(3) \quad (10^m + 1)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) = 2x(x + \varepsilon a + \varepsilon' b).$$

$$(4) \quad (10^m - 1)(y^2 - x^2 + a^2 - b^2) = 2(b^2 - a^2) + 2x(\varepsilon b - \varepsilon' a).$$

Vom face ipoteza că $10^m + 1$ este un număr prim, in acest caz, deoarece $x < 10^m + 1$, iar *a* și *b* au un număr de cifre cel mult egal cu $E\left(\frac{m+1}{2}\right)$, rezultă $x + \varepsilon a + \varepsilon' b = 0$. În privința semnelor, din

(1) se vede că deoarece $x > a$, $x < y$, trebue $x + \varepsilon a > y$, deci $\varepsilon = 1$. Condiția precedentă cere atunci neapărat $\varepsilon' = -1$ și devine

$$b = x + a. \tag{5}$$

(3) devine însă $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ sau

$$y^2 = 2a^2 + 2ax = 2a(x + a),$$

cu care (1) devine $(10^m - 1)(x^2 - a^2) = 0$, adică

$$x = a, \quad y = 2a, \quad b = 2a,$$

$$u = (10^m + 2)a, \quad v = (2.10^m + 1)a.$$

Problema are atâtea soluții câte valori putem lua pentru a astfel ca a^2 și $4a^2$ să aibă m cifre.

Soluția de mai sus convine și când $10^m + 1$ nu este prim, deosebirea este că în acest caz s'ar putea să mai existe și alte soluții, ceiace ar trebui cercetat. La această cercetare se vor folosi egalitățile (3) și (4), care se mai pot scrie, observând că din (1) $\varepsilon = 1$ de oarece $x > a$ și $y > x$,

$$(3') \quad (10^m + 1)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) = 2x(x + a + \varepsilon' b),$$

$$(4') \quad (10^m - 1)(y^2 - x^2 + a^2 - b^2) = 2\varepsilon'(b - \varepsilon' a)(x + a + \varepsilon' b).$$

Pentru $m = 1$, avem $a = 1$, deci

$$u^2 = 144 = 12^2, \quad v^2 = 441 = 21^2.$$

În cazul particular al problemei propuse, $m = 2$ și singurul număr a astfel ca a^2 și $4a^2$ să aibă câte două cifre este $a = 4$, care dă soluția

$$u^2 = 166464 = 408^2, \quad v^2 = 646416 = 804^2.$$

Pentru $m = 3$, putem lua $a = 10, 11, 12, 13, 14, 15$, cu soluțiile

$u^2 = 100400400 = 10020^2$, $v^2 = 400400100 = 20010^2$,
$u^2 = 121484484 = 11044^2$, $v^2 = 484484121 = 22011^2$,
$u^2 = 144576576 = 12024^2$, $v^2 = 576576144 = 24012^2$,
$u^2 = 169676676 = 13026^2$, $v^2 = 676676169 = 26013^2$,
$u^2 = 196784784 = 14028^2$, $v^2 = 784784196 = 28014^2$,
$u^2 = 225900900 = 15030^2$, $v^2 = 900900225 = 30015^2$.

Notă. Au găsit soluția 408^2 și 804^2 încercând toate patratele de două cifre A și B, d-nii *Andrievici Gh*, *Aniţescu N*, *Anton G.*, *Diaconescu M*, *Dăscălescu Hr*, *Jidanu C*. *Sub-Lt Lupescu C.*, *Modâlcă E*, *Moldovan C*, *Sub-Lt. Popescu A.*, *Reischer H*, *Solomon I*, *Staicu N.*, *Stoenescu M.*, *Topolescu Gh.*

Numeroși alți corespondenți, dintr'o nepermisă neatenție, au considerat cazul $m = 1$, găsind soluția deja citată.

M. G.

Problema 1629. — *Să se determine două numere întregi x și y, astfel ca suma și suma patratelor lor să fie patrate.*

A. GLODEN

Această problemă este un caz particular al problemei 1636, rezolvată la pag. 73, în care vom face $a = 1$.

Au trimis soluții la această problemă, d-nii: *Jidanu C.*, *Murgu Marțian* și *Tilică Șt.*

M. G.

Problema 1669. — *Să se rezolve sistemul de ecuații*

$$(1 + x)(1 - y) = (1 + y)(1 - z) =$$
$$(1 + z)(1 - t) = (1 + t)(1 - x) = a.$$

Discuție. Caz particular $a = 1$.

LT. C. D IONESCU-TIU

Punem $a - 1 = b$, ecuațiile se mai pot scrie:

$$(1) \quad \begin{aligned} x(1 - y) &= b + y, \quad & z(1 + y) &= y - b, \\ z(1 - t) &= b + t, \quad & x(1 + t) &= t - b. \end{aligned}$$

Împărțim prima cu ultima, a doua cu a treia, avem

$$(2) \quad \begin{aligned} t - b + by - yt &= b + y + bt + yt, \\ b + t + by + yt &= y - b + bt - yt, \end{aligned}$$

iar prin adunare, $2(t + by) = 2(y + bt)$, sau

$$t(1 - b) = y(1 - b).$$

Dacă $b \neq 1$, deducem $t = y$, iar ecuațiile (1) dau

$$x = y = z = t = \pm\sqrt{1 - a}.$$

Dacă $a = 1$, avem soluția $x = y = z = t = 0$

Dacă $b = 1$, adică $a = 2$, (2) dau

$$xz = 1, \qquad yt = -1$$

și problema admite o infinitate de soluții în care una din necunoscute este arbitrară. Vom avea astfel soluția generală

$$x = \frac{t - 1}{t + 1}, \quad z = \frac{1 + t}{1 - t}, \quad y = -\frac{1}{t},$$

unde t ia orice valoare, afară de 0 și ± 1.

Notă. Nimeni, nici chiar autorul problemei, nu a semnalat cazul remarcabil $a = 2$.

Pentru celelalte cazuri, a găsit soluția necunoscutelor egale, d-nii *Dragan Gh* și Sub-Lt. *Stefănescu Marin.*

Celelalte soluții insuficiente.

M. G.

Problema 1674. — *Să se găsească patratele perfecte de forma a b c d, în care* $2a = c$, *iar a b a este număr prim.*

SUB-LT MARIN P. TICA-GALL

Se vede că $a < 5$ şi cum aba e prim, a e impar adică $a = 1$ sau 3, deci $c = 2$ sau 6 Numărul prim aba poate fi deci $1b1$, sau $3b3$ adică

101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383,

astfel că patratele căutate se găsesc printre formele posibile

$1012d$, $1312d$, $1512d$, $1812d$, $1912d$,
$3136d$, $3536d$, $3736d$, $3836d$.

Extragând rădăcina patrată la fiecare, găsim patrat numai la $1512d$, care ne dă soluţia unică

$$15129 = 123^2.$$

Notă. 1°. Au găsit soluţia pe calea de mai sus d-nii: *Backonyi C., Cetăţeanu Şt., Modâlcă E., Moldovan C., Sublt. Ştefănescu M., Tilică Şt., Radu I.* şi *Rădulescu A.*,
2°. Au folosit şi terminaţiile patratelor Dra *Papadopol E.*, şi Dnii: *Aniţescu N., Bârlea-Suhăţeanu V. Cristea N., Dăscălescu Hr., Gligor I., Jidanu C., Luca I., Sublt. Lupescu C., Slavov I.* şi *Stamate I.*
3°. Soluţii mai simpliste au dat Dnii: *Anton G., Borneaş M., O. Mureşan* şi *Tătaru A.*

M G.

PROBLEME PROPUSE

1978. — Există un patrat perfect care, urmat de rădăcina sa patrată, să dea alt patrat perfect?

M. GHERMANESCU

1979. — Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} ax + ay + 2z = 6 \\ ax + 2y + az = 2b \\ 2x + ay + az = 6 \end{cases}$$

CORNELIA NANES

1980. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x(xy^3 + 1) = y(x^3 + y) \\ y(x^3 y + 1) = x(y^3 + x). \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

1981. — Se prelungeşte arbitrar diametrul unui cerc O şi într'un punct oarecare C se duce o perpendiculară. Prin acelaşi punct se duce o secantă la cerc. Fie B, D punctele de intersecţie cu cercul. În aceste puncte se duc tangentele la cerc, care tae perpendiculara dusă pe diametru, în punctele A, E.

1. Să se demonstreze că $AC = CE$.

2. Problema este aceiaşi şi când punctul C este interior cercului.

EMANUEL I. SARULESTEANU

1982. — Se dă unghiul drept xOy şi din O se descrie un sfert de cerc AB, A şi B fiind pe laturi. Un punct P al sfertului de cerc AB se proiectează ortogonal pe Ox în P_1, iar din P_1 se duce o dreaptă care să taie raza OP într'un punct Q astfel ca:

$$\sphericalangle OP_1Q = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, \qquad (\theta = \sphericalangle P_1OQ.$$

Se cere locul geometric al punctului Q, când P descrie sfertul de cerc AB.

V. ALACI

1983. — Se dă punctul P în planul conicei (C) şi se cere locul punctelor M pentru care perpendiculara în M pe MP este tangentă sau normală la (C).

Să se examineze cazul particular când P se află pe una din axele conicei date.

G-L GH. BUICLIU

1984. — Să se determine o curbă (C) printr'o ecuaţie de forma $y = f(x)$, astfel ca ducând normala şi tangenta într'un punct oarecare M al curbei, care întâlneşte axa Ox în N şi T, să avem

$$\overline{MM_1}^2 - p \cdot \overline{TN} + p^2 = 0,$$

unde M_1 este proecţia lui M pe axa Ox, iar p o constantă.

D. V. IONESCU

1985. — Notaţiile fiind cele obicinuite, să se stabilească identitatea:

$$\sum \left(\frac{r_a^2}{a r_a + pr} \right)^2 - \sum \left(\frac{r_b^2}{b r_b + pr} \right)^2 = 2 \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

FLORIAN I. GOGA

Observări. 1. Autorul problemei 100, publicată în *n*-rul trecut, este *Gh. Zapan*, nu *Gr. Zapan.*

2 Problema 164, publicată în *n*-rul trecut, a fost redactată de D-l prof. *Gh. Th. Gheorghiu.*

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

Întristată ațistență. [1]

Un vânt năpraznic, ce s'a abătut anul trecut asupra Țării noastre, i-a îngustat temporal cuprinsul și ca urmare, mândra Universitate din Cluj, far strălucitor al Culturii noastre și-a mutat, temporal, activitatea, o parte la Sibiu și o altă parte la Timișoara.

Am primit frățește pe colegii Facultății de Stiință, aici la Timișoara, pe acești colegi dragi, creatori de știință, care au știut și știu să ție atât de sus steagul Științei românești.

Venind aci în mijlocul nostru, acum aproape un an, distinșii noștrii colegi și-au înăbușit cât au putut durerile sufletești și și-au reluat activitatea în ogorul științei, cu aceeași intensitate, convinși că o Țară se ridică, e drept, prin puterea Armatei sale biruitoare, dar și prin puterea Culturii sale strălucite.

În această atmosferă de gândire și activitate intensă, de nădejdi pline de avânt creator, de solidaritate și unitate colegială, a trăit în mijlocul nostru, până acum câteva zile și colegul iubit și stimat, profesorul GHEORGHE BRATU.

Senin și luminat la față, de o înfățișare tânără față de cei 60 ani împliniți, de o viociune spirituală remarcabilă, de o bunătate sufletească fără margini, față de colegi și mai ales față de studenți, de un farmec neprețuit în discuții, dornic de a afla rezultate noui în diferitele domenii ale științei și mai ales în domeniul specialității sale „Astronomia", pe care știa să și le apropie cu ușurință, bun și duios părinte de familie, a trimis în mijlocul Societății elemente de valoare,... iată ce pierde Universitatea, iată ce coleg plin de farmec pierdem noi prietenii săi și Societatea românească.

Despre omul de Știință, despre profesorul apostol, despre părintele iubitor al familiei sale, au vorbit pe larg antivorbitorii mei.

În numele Politehnicei din Timișoara, în cuprinsul căreia Profesorul *Bratu* a ținut câteva conferințe publice din domeniul Astronomiei, ascultate cu interes și admirație de publicul timișorean, în numele Societății de Știință și a Revistei Matematice dela școala noastră al căror membru activ a fost și în numele meu personal, aduc astăzi un pios omagiu și o simțită părere de rău, pentru acel ce a fost colegul neprețuit și profesorul devotat *Gheorghe Bratu*.

Fie, ca spiritul său luminat, descătușat de întruchiparea materială, să plutească liniștit și împăcat în lumea stelelor pe care le-a studiat, în sferele senine ale neființei, acolo de unde încurând, antena spiritului său nemuritor va auzi trîmbițat în tot cuprinsul Țării, deviza scumpă a inimilor noastre:

Nici o brazdă românească n'a fost uitată!

Conștienți de marea pierdere ce o încearcă știința, familia și Societatea românească, ne plecăm îndurerați frunțile în fața rămășiților sale pământești

Prof. V. ALACI

[1]) Cuvinte rostite la înmormântarea regretatului profesor *Gh. Bratu*.

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacția „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timișoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, București V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareș No. 41, Piatra-Neamț,

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

ANUL XXI. NOEMVRIE 1941 No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **O. TINO:** O PROPRIETATE INTERESANTA A POLIGOANELOR REGULATE DE UN NUMAR IMPAR DE LATURI.

2. NOTE MATEMATICE: 21, 22, 23.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 1602, 1637, 1657, 1828.

5. PROBLEME PROPUSE: 1986 1993.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Cu plăcere anunţăm că dela 15 Noemvrie 1941 mai fac parte dintre membrii „Revistei Matematice" din Timişoara şi D-nii:

1. *Bal Lascu,* licenţiat în matematici, preparator la *Institutul de Gravitate Căldură şi Electricitate* a Facultăţii de Ştiinţe, Timişoara, Str. Siret 4.
2. *Hermann Victor,* licenţiat în matematici, comuna Baia, Jud. Arad.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXI, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XXI — No. 9 TIMISOARA, NOEMVRIE 1941

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

O PROPRIETATE INTERESANTĂ A POLIGOANELOR REGULATE DE UN NUMĂR IMPAR DE LATURI.

De O. N. ȚINO

Este de mult cunoscută proprietatea triunghiului echilateral: *distanța unui punct al cercului, circumscris triunghiului echilateral, la vârful cel mai depărtat, este egală cu suma distanțelor acelui punct la celelalte două vârfuri ale triunghiului.*

Această proprietate se găsește generalizată pentru poligoanele regulate de *cinci* și *șapte* laturi în *Culegerea de probleme de Geometrie de F. G. M., ed. V-a,* demonstrațiile fiind specifice fiecărui caz. In acelaș loc se arată că s'a demonstrat de cale trigonometrică că proprietatea este generală pentru orice poligon de un număr *impar* de laturi. Nu cunoaștem să fie dată până în prezent o demonstrație geometrică aplicabilă oricărui poligon regulat de un număr impar de laturi; după demonstrațiile date pentru cazurile tratate în Culegerea *F. G. M.* ar urma că o atare demonstrație geometrică să nu fie încă cunoscută. Aceste deducții ne-a hotărît să publicăm soluția ce posedăm.

1. Să enunțăm proprietatea generală:

Dacă considerăm un poligon regulat de un număr **impar** *de laturi, cercul său circumscris și un punct* M *pe acest cerc,* **suma distanțelor punctului M la vârfurile de rang impar (față de el) este egală cu suma distanțelor lui la vârfurile de rang par.**

Ne propunem în primul rând plecând dela cazurile tratate ($n = 3$, $n = 5$) să arătăm că *în cazul poligoanelor regulate de un număr impar de laturi, proprietatea este adevărată pentru o poziție* **oarecare a punctului M** *pe cercul circumscris poligonului regulat, dacă ea este adevărată când* M *este mijlocul unui arc întins de o latură a poligonului regulat.*

a. Fie triunghiul echilateral $A_1A_2A_3$ înscris în cercul O și M un punct oarecare al arcului A_1A_3. Avem relația:

$$(P) \qquad \overline{MA_2} = \overline{MA_1} + \overline{MA_3}$$

Luăm pe arcele A_1A_2, A_2A_3 respectiv punctele B_1, B_2 astfel că:

$$(1) \qquad \text{arc } A_1B_1 = \text{arc } A_2B_2 = \text{arc } A_3M,$$

apoi ducând coardele B_1A_1, B_1A_2, A_1B_2, fie C_1 intersecția (MA_2, A_1B_2). Observăm acum că $A_1B_1 \parallel MA_2$ și $B_1A_2 \parallel A_1B_2$, rezultă imediat că:

$$(\alpha) \quad \overline{A_2C_1} = \overline{A_1B_1} = \overline{MA_3}, \qquad (\beta) \quad \overline{MC_1} = \overline{MA_1}, \quad \text{căci} \quad \sphericalangle A_1C_1M = \sphericalangle C_1A_1M = \frac{\pi}{3},$$

deci: $$\overline{MA_2} = \overline{MC_1} + \overline{C_1A_2} = \overline{MA_1} + \overline{MA_3}.$$ C. C. T. D.

Observare. Având $\overline{A_1C_1} = \overline{A_1M}$ și însemnând cu C_2 punctul unde MA_1 prelungit întâlnește cercul cu centrul în A_1 și rază $\overline{A_1M}$, avem: $\sphericalangle C_2A_1C_1 = \frac{2\pi}{3}$, iar $\sphericalangle C_1A_1M = \frac{\pi}{3}$, deci C_2 este al doilea vârf

al triunghiului echilateral $C_1 C_2 C_3$ înscris în cercul (A_1), iar M este pe acest cerc mijlocul arcului $C_1 C_3$. A arăta că $\overline{MA_1} = \overline{MC_1}$ este acelaşi lucru cu a arăta că: $\overline{MC_2} = \overline{MC_1} + \overline{MC_3}$, adică că *proprietatea este adevărată pentru o poziţie particulară: M mijlocul arcului* $C_1 C_3$ *pe cercul* A_1.

Proprietatea este mai vizibilă în cazul $n = 5$.

b. Fie pentagonul regulat convex $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ înscris în cercul O şi fie M un punct oarecare pe arcul $A_1 A_5$. Avem relaţia:

$$\overline{MA_1} + \overline{MA_3} + \overline{MA_5} = \overline{MA_2} + \overline{MA_4}.$$

Luăm pe arcele $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_5$ respectiv punctele B_1, B_2, B_3, B_4 astfel ca:

(1) $$\text{arc } A_1 B_1 = \text{arc } A_2 B_2 = \text{arc } A_3 B_3 = \text{arc } A_4 B_4 = \text{arc } A_5 M.$$

Fie C_2 şi C_1 respectiv intersecţiile $(MA_2, A_1 B_2)$ şi $(MA_3, A_1 B_4)$.

Observând acum că $A_1 B_1 \parallel MA_2$; $B_1 A_2 \parallel A_1 B_2$; $B_2 A_3 \parallel A_1 B_4$; $A_1 B_2 \parallel MA_3$, deducem că:

(2) $\overline{C_2 A_2} = \overline{A_1 B_1} = \overline{MA_5}$ şi (3) $\overline{A_1 C_2} = \overline{B_1 A_2} = \overline{MA_1}$, deci (4) $\overline{MA_2} = \overline{MC_2} + \overline{MA_5}$.

Asemenea având:

(5) $\overline{C_1 A_3} = \overline{A_1 B_2} = \overline{MA_4}$ şi (6) $\overline{A_1 C_1} = \overline{B_2 A_3} = \overline{A_1 M}$ rezultă că: (7) $\overline{MA_3} = \overline{MC_1} + \overline{MA_4}$.

Dar:
$$\alpha = \overline{MA_1} + \overline{MA_3} + \overline{MA_5} = \overline{MA_1} + \overline{MC_1} + \overline{MA_4} + \overline{MA_5},$$
$$\beta = \overline{MA_2} + \overline{MA_4} = \overline{MC_2} + \overline{MA_5} + \overline{MA_4},$$

ca urmare α şi β sunt egale dacă:

(R) $$\overline{MC_2} = \overline{MA_1} + \overline{MC_1}$$

Având $\overline{A_1 C_1} = \overline{A_1 C_2} = \overline{A_1 M}$, rezultă că cercul cu centrul în A_1 şi raza $\overline{A_1 M}$ trece prin punctele C_1 şi C_2; fie C_3 punctul unde MA_1 prelungit taie cercul (A_1). Dacă C_4 şi C_5 sunt simetricile punctelor C_2 şi C_1 în raport cu dreapta MA_1, relaţia (R) poate să fie scrisă subt forma:

(R′) $$\overline{MC_2} + \overline{MC_4} = \overline{MC_1} + \overline{MC_3} + \overline{MC_5},$$

iar subt această formă ea exprimă proprietatea (P) pentru cercul (A_1) şi exagonul regulat $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$ înscris, unde M este mijlocul arcului $C_1 C_5$.

In adevăr, avem: $\sphericalangle C_3 A_1 C_2 = \sphericalangle C_2 A_1 C_1 = 2 \sphericalangle A_1 M A_2 = \frac{2\pi}{5}$ şi $\sphericalangle C_1 A_1 M = \sphericalangle M A_1 B_4 = \frac{\pi}{5}$, deci cercul (A_1) a fost împărţit în cinci părţi egale, iar M este mijlocul arcului $C_1 C_5$.

Acum pentru demonstrarea relaţiei (R), fie D_1 punctul unde $A_1 C_1$ taie pe MC_2. Punând $\frac{\pi}{5} = \varphi$, avem: $\sphericalangle MD_1 C_1 = \sphericalangle MA_1 D_1 + \sphericalangle A_1 MD = 2\varphi$, deci

(8) $$\overline{MD_1} = \overline{MC_1},$$

Asemenea avem: $\sphericalangle A_1 D_1 C_2 = \sphericalangle D_1 A_1 C_2 = 2\varphi$, deci:

(9) $$\overline{D_1 C_2} = \overline{A_1 C_2} = \overline{MA_1}.$$

Din (8) şi (9) deducem imediat:

$$\overline{MC_2} = \overline{MD_1} + \overline{D_1 C_2} = \overline{MC_1} + \overline{MA_1}. \qquad \text{C. C. T. D.}$$

c. Prima parte a demonstraţiei de mai sus (pentru $n = 5$) se aplică întocmai oricărui poligon regulat de un număr impar de laturi $n = 2p + 1$; a doua parte, demonstraţia în cazul când M este mijlocul unui arc, prezintă o mică modificare de amănunt când trecem de la cazurile în care p este număr par, la acelea în care p este număr impar. Dealtfel mărimea lui p nu modifică mersul demonstraţiei, ca urmare pentru ca demonstraţia să fie uşor urmărită vom cousidera două cazurî particulare $p=8$ şi $p=9$, adică $n=17$ şi $n=19$.

c$_1$. *Fie poligonul convex regulat de 17 laturi* $A_1A_2\ldots A_{17}$, *cercul său circumscris* O *şi un punct oarecare* M *pe arcul* A_1A_{17}.

Avem relaţia:

$$(P)\quad \overline{MA_1}+\overline{MA_3}+\overline{MA_5}+\overline{MA_7}+\overline{MA_9}+\overline{MA_{11}}+\overline{MA_{13}}+\overline{MA_{15}}+\overline{MA_{17}}=\overline{MA_2}+\overline{MA_4}+\overline{MA_6}+\overline{MA_8}+\overline{MA_{10}}+\overline{MA_{12}}+\overline{MA_{14}}+\overline{MA_{16}}.$$

Luăm pe arcele A_1A_2, $A_2A_3,\ldots,$ $A_{16}A_{17}$ respectiv punctele B_1, $B_2,\ldots,$ B_{16} astfel ca:

$$(1)\qquad \text{arc } A_1B_1=\text{arc } A_2B_2=\cdots=\text{arc } A_iB_i=\cdots=\text{arc } A_{16}B_{16}=\text{arc } A_{17}M$$

Avem în acelaş timp:

$$(2)\qquad \text{arc } B_1A_2=\text{arc } B_2A_3=\cdots=\text{arc } B_iA_{i+1}=\cdots=\text{arc } B_{16}A_{17}=\text{arc } MA_1.$$

Fie $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$, respectiv intersecţiile: (MA_9, A_1B_{16}); (MA_8, A_1B_{14}); (MA_7, AB_{12}); (MA_6, A_1B_{10}); (MA_5, A_1B_8); (MA_4, A_1B_6); (MA_3, A_1B_4); (MA_2, A_1B_2). Observând apoi că: $MA_2\|A_1B_1$ şi $A_1B_2\|B_1A_2$; $MA_3\|A_1B_2$ şi $A_1B_4\|B_2A_3$; $MA_4\|A_1B_3$ şi $A_1B_6\|B_3A_4$; $MA_5\|A_1B_4$ şi $A_1B_8\|B_4A_5$; $MA_6\|A_1B_5$ şi $A_1B_{10}\|B_5A_6$; $MA_7\|A_1B_6$ şi $AB_{12}\|B_6A_7$; $MA_8\|A_1B_7$ şi $A_1B_{14}\|B_7A_8$; $MA_9\|A_1B_8$ şi $A_1B_{16}\|B_8A_9$ deducem relaţiile succesive următoare:

$$(3)\quad \begin{aligned}
\overline{MA_2}&=\overline{MC_8}+\overline{C_8A_2}=\overline{MC_8}+\overline{A_1B_1}=\overline{MC_8}+\overline{MA_{17}}\\
\overline{MA_3}&=\overline{MC_7}+\overline{C_7A_3}=\overline{MC_7}+\overline{A_1B_2}=\overline{MC_7}+\overline{MA_{16}}\\
\overline{MA_4}&=\overline{MC_6}+\overline{C_6A_4}=\overline{MC_6}+\overline{A_1B_3}=\overline{MC_6}+\overline{MA_{15}}\\
\overline{MA_5}&=\overline{MC_5}+\overline{C_5A_5}=\overline{MC_5}+\overline{A_1B_4}=\overline{MC_5}+\overline{MA_{14}}\\
\overline{MA_6}&=\overline{MC_4}+\overline{C_4A_6}=\overline{MC_4}+\overline{A_1B_5}=\overline{MC_4}+\overline{MA_{13}}\\
\overline{MA_7}&=\overline{MC_3}+\overline{C_3A_7}=\overline{MC_3}+\overline{A_1B_6}=\overline{MC_3}+\overline{MA_{12}}\\
\overline{MA_8}&=\overline{MC_2}+\overline{C_2A_8}=\overline{MC_2}+\overline{A_1B_7}=\overline{MC_2}+\overline{MA_{11}}\\
\overline{MA_9}&=\overline{MC_1}+\overline{C_1A_9}=\overline{MC_1}+\overline{A_1B_8}=\overline{MC_1}+\overline{MA_{10}}
\end{aligned}$$

Ca urmare, avem:

$$(4)\qquad \alpha=\sum_{i=0}^{8}\overline{MA_{2i+1}}=\overline{MA_1}+\overline{MC_1}+\overline{MC_3}+\overline{MC_5}+\overline{MC_7}+\sum_{k=10}^{17}\overline{MA_k},$$

$$(5)\qquad \beta=\sum_{i=1}^{8}\overline{MA_{2i}}=\overline{MC_2}+\overline{MC_4}+\overline{MC_6}+\overline{MC_8}+\sum_{k=10}^{17}\overline{MA_k}.$$

Pentru ca să avem relaţia $\alpha=\beta$, este *necesar* şi *suficient* să avem:

$$(R)\qquad \overline{MA_1}+\overline{MC_1}+\overline{MC_3}+\overline{MC_5}+\overline{MC_7}=\overline{MC_2}+\overline{MC_4}+\overline{MC_6}+\overline{MC_8}.$$

Fie C_9 punctul unde prelungirea lui MA_1 taie cercul cu centrul în A_1 şi raza $\overline{A_1M}$. Acest cerc trece prin punctele $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$, căci $\overline{A_1C_1}=\overline{B_8A_9}$, $\overline{A_1C_2}=\overline{B_7A_8}$, $\overline{A_1C_3}=\overline{B_6A_7}$, $\overline{A_1C_4}=\overline{B_5A_6}$, $\overline{A_1C_5}=\overline{B_4A_5}$, $\overline{A_1C_6}=\overline{B_3A_4}$, $\overline{A_1C_7}=\overline{B_2A_3}$, $\overline{A_1C_8}=\overline{B_1A_2}$, iar după (2) avem: $\overline{B_1A_2}=\overline{B_2A_3}=\overline{B_3A_4}=\overline{B_4A_5}=\overline{B_5A_6}=\overline{B_6A_7}=\overline{B_7A_8}=\overline{B_8A_9}=\overline{A_1M}$, deci:

$$(6)\qquad \overline{A_1C_1}=\overline{A_1C_2}=\overline{A_1C_3}=\overline{A_1C_4}=\overline{A_1C_5}=\overline{A_1C_6}=\overline{A_1C_7}=\overline{A_1C_8}=\overline{A_1M}.$$

De altă parte, punând $\frac{\pi}{17}=\varphi$ şi observând că: $\sphericalangle C_8A_1C_7=\sphericalangle B_2A_1B_4=2\varphi$; $\sphericalangle C_7A_1C_6=\sphericalangle B_4A_1B_6=2\varphi$; $\sphericalangle C_6A_1C_5=\sphericalangle B_6A_1B_8=2\varphi$; $\sphericalangle C_5A_1C_4=\sphericalangle B_8A_1B_{10}=2\varphi$; $\sphericalangle C_4A_1C_3=\sphericalangle B_{10}A_1B_{12}=2\varphi$; $\sphericalangle C_3A_1C_2=\sphericalangle B_{12}A_1B_{14}=2\varphi$; $\sphericalangle C_2A_1C_1=\sphericalangle B_{14}A_1B_{16}=2\varphi$; $\sphericalangle C_1A_1M=$

$= \sphericalangle B_{16} A_1 M = \varphi$ deducem că:

$$\sphericalangle C_9 A C_3 = \pi - (7 \times 2\varphi + \varphi) = \frac{2\pi}{17} = 2\varphi.$$

Aşadar, cercul A_1, de rază $\overline{A_1 M}$, este împărţit de punctele $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9$ şi simetricile lor în raport cu dreapta $M C_9$ în 17 părţi egale, punctul M fiind ca urmare mijlocul arcului $C_1 C_{17}$ al acestui cerc. Relaţia (R) pe care urmează s'o demonstrăm, amplificată cu 2 este tocmai relaţia (P), însă pentru cazul particular când punctul M este mijlocul unui arc.

Urmează de aci că o *proprietatea enunţată pentru poligonul convex regulat de 17 laturi, când punctul* M *este oarecare pe cercul circumscris, este adevărată, dacă ea este adevărată pentru cazul particular când* M *este mijlocul unui arc întins de o latură a poligonului.*

c_2. Procedeul se aplică identic poligonului regulat de *19* laturi.

d. Pentru cazul general al poligonului regulat de $n = 2p + 1$ laturi, $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{2p} A_{2p+1}$ şi M un punct oarecare al arcului $A_1 A_{2p+1}$ de pe cercul circumscris poligonului, avem relaţia:

$$(P) \qquad \sum_{i=0}^{p} \overline{M A_{2i+1}} = \sum_{i=1}^{p} \overline{M A_{2i}}.$$

Luăm punctele B_k respectiv pe arcele $A_k A_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$, astfel ca:

$$(1) \qquad \text{arc } A_k B_k = \text{arc } A_{2p+1} M \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

din care avem ca urmare:

$$(2) \qquad \text{arc } B_k A_{k+1} = \text{arc } M A_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Fie acum $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_p$ intersecţiile $(M A_{p+1}, A_1 B_{2p})$, $(M A_p, A_1 B_{2p-2})$; $(M A_{p-1}, A_1 B_{2p-4})$; ... ...; $(M A_2, A_1 B_2)$. Observând că dreptele $M A_2, M A_3, M A_4, \ldots, M A_p, M A_{p+1}$ sunt respectiv paralele cu $A_1 B_1, A_1 B_2, A_1 B_3, \ldots, A_1 A_{p-1}, A_1 B_p$ şi că dreptele $A_1 B_2, A_1 B_4, A_1 B_6, \ldots, A_1 B_{2p-2}, A_1 B_{2p}$ sunt respectiv paralele cu $B_1 A_2, B_2 A_3, B_3 A_4, \ldots, B_{p-1} A_p, B_p A_{p+1}$, deducem, din paralelogramele formate, relaţiile:

$$(3) \qquad \overline{M A_{2i+1}} = \overline{M C_{p+1-2i}} + \overline{C_{p+1-2i} A_{2i+1}}; \quad \overline{M A_{2i}} = \overline{M C_{p+2-2i}} + \overline{C_{p+2-2i} A_{2i}},$$

însă:

$$(4) \qquad \overline{C_{p+1-2i} A_{2i+1}} = \overline{A_1 B_{2i}}; \quad \overline{C_{p+2-2i} A_{2i}} = A_1 B_{2i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

iar:

$$(5) \qquad \overline{A_1 B_{2i}} = \overline{M A_{2(p+1)-2i}} \quad \text{şi} \quad \overline{A_1 B_{2i-1}} = M A_{2(p+1)-(2k+1)}$$

rezultă dar că, cele două părţi ale relaţiei (P) sunt egale, dacă avem:

$$(R_1) \qquad \overline{M A_1} + \sum_{k=1}^{\left(\frac{p}{2}\right)} \overline{M C_{2k-1}} = \sum \overline{M C_{2k}}, \quad \text{sau} \quad (R_2) \quad \overline{M A_1} + \sum_{k=1}^{\left(\frac{p}{2}\right)} \overline{M C_{2k}} = \sum \overline{M C_{2k+1}},$$

după cum p este un număr *par* sau *impar*, simbolul $\left(\frac{p}{2}\right)$ însemnând cel mai mare întreg cuprins în $\frac{p}{2}$.

Însemnând cu C_{p+1} punctul diametral opus lui M în cercul (A_1) cu raza $\overline{A_1 M}$ şi centrul A_1, avem ca în toate cazurile particulare tratate: $\overline{A_1 M} = \overline{A_1 C_1} = \overline{A_1 C_2} = \cdots = \overline{A_1 C_p}$, adică cercul (A_1) de mai sus trece prin punctele $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_p$; apoi punând $\frac{\pi}{2p+1} = \varphi$, găsim că: $\sphericalangle M A_1 C_1 = \sphericalangle B_{2p} A_1 M = \varphi$;

$$\sphericalangle C_k A_1 C_{k+1} = \sphericalangle B_{2p-2k+2} A_1 B_{2p-2k} = 2\varphi \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \sphericalangle C_p A_1 C_{p+1} = \frac{2\pi}{2p+1} = 2\varphi;$$

deci cercul (A_1) este împărțit de punctele $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{p+1}$ și simetricile lor în raport cu $M A_1$ în $(2p+1)$ părți egale, iar M este mijlocul arcului $A_1 A_{2p+1}$. Așadar, teorema este generală. *Pentru ca relația* (P) *să fie adevărată pentru poligonul convex regulat de* $(2p+1)$ *laturi, când punctul* M *este oarecare pe cercul circumscris poligonului, este* **necesar** *și* **suficient**. *ca ea să fie adevărată pentru cazul particular când punctul* M *este mijlocul unui arc (al cercului circumscris) întins de o latură a poligonului convex regulat de* $(2p+1)$ *laturi.*

2. Pentru demonstrarea relațiilor (R), să considerăm cazurile $n=17$ și $n=19$ pentru a arăta diferența de amănunt în demonstrare între cele două cazuri: a. *p* număr *par*, b. *p* număr *impar*.

a. *Să considerăm întâi* $p=8$.

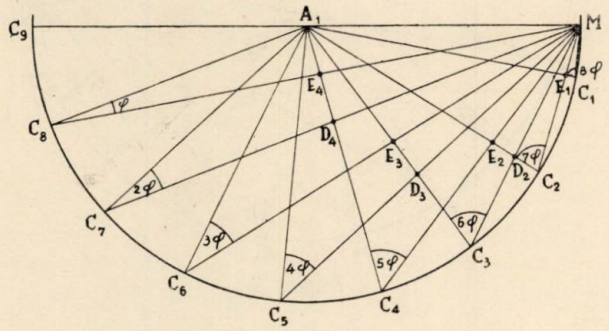


Figura 1.

Ducem razele $A_1C_1, A_1C_2, \ldots, A_1C_8$ și fie E_1; D_2, E_2; D_3, E_3; D_4, E_4 intersecțiile: $(A_1C_1, M C_2)$; $(A_1C_2, M C_3)$; $(A_1C_2, M C_4)$; $(A_1C_3, M C_5)$; $(A_1C_3, M C_6)$; $(A_1C_4, M C_7)$; $(A_1C_4, M C_8)$.

Triunghiurile $C_1 M E_1$, $D_2 M E_2$, $D_3 M E_3$, $D_4 M E_4$, $E_4 C_8 A_1$ sunt toate triunghiuri isoscele, având:

$$\sphericalangle M C_1 E_1 = \sphericalangle M E_1 C_1 = \sphericalangle M D_2 E_2 = \sphericalangle M E_2 D_2 = \sphericalangle M D_3 E_3 = \sphericalangle M E_3 D_3 = \sphericalangle M D_4 E_4 =$$
$$= \sphericalangle M E_4 D_4 = \sphericalangle C_8 E_4 A_1 = \sphericalangle C_8 A_1 E_4 = 8\varphi,$$

deci:

(1) $$\overline{M E_1} = \overline{M C_1};\ \overline{M E_2} = \overline{M D_2};\ \overline{M E_3} = \overline{M D_3};\ \overline{M E_4} = \overline{M D_4};\ \overline{C_8 E_4} = \overline{A_1 C_8} = \overline{A_1 M}.$$

De altă parte, avem:

(2) $$\overline{E_1 C_2} = \overline{A_1 D_4} = \overline{D_2 C_3},\ \overline{E_2 C_4} = \overline{A_1 D_3} = \overline{D_3 C_5};\ \overline{E_3 C_6} = \overline{A_1 D_2} = \overline{D_4 C_7},$$

căci se vede ușor perechile de egalități de triunghiuri:

$$\Delta A_1 E_1 C_2 = \Delta A_1 D_4 M \quad \text{și} \quad \Delta A_1 D_2 C_3 = \Delta C_7 A_1 D_4$$
$$\Delta A_1 E_2 C_4 = \Delta A_1 D_3 M \quad \text{și} \quad \Delta A_1 D_3 C_5 = \Delta C_5 A_1 D_3 \qquad \text{(tr. isoscel)}$$
$$\Delta A_1 E_3 C_6 = \Delta A_1 D_2 M \quad \text{și} \quad \Delta A_1 D_4 C_7 = \Delta C_3 A_1 D_2.$$

Ținând seamă de relațiile (1) și (2), avem imediat:

$$\overline{M C_2} + \overline{M C_4} + \overline{M C_6} + \overline{M C_8} = \overline{M E_1} + \overline{E_1 C_2} + \overline{M E_2} + \overline{E_2 C_4} + \overline{M E_3} + \overline{E_3 C_6} + \overline{M E_4} + \overline{E_4 C_8} \equiv$$
$$\equiv \overline{M C_1} + (\overline{D_2 C_3} + \overline{M D_2}) + (\overline{D_3 C_5} + \overline{M D_3}) + (\overline{D_4 C_7} + \overline{M D_4}) + \overline{M A_1}$$
$$= \overline{M A_1} + \overline{M C_1} + \overline{M C_3} + \overline{M C_5} + \overline{M C_7}. \qquad \text{C. C. T. D.}$$

Demonstrația se aplică identic pentru cazul *p* număr par oricare.

b. *Să luăm acum cazul* $p=9$ $(n=19)$.

Ducem razele A_1C_1, A_1C_2,..., A_1C_9 şi fie E_1, D_2, E_2; D_3, E_3; D_4, E_4; D_5 intersecţiile: (A_1C_1, MC_2); (A_1C_2, MC_3); (A_1C_2, MC_4); (A_1C_3, MC_5); (A_1C_3, MC_6); (A_1C_4, MC_7); (A_1C_4, MC_8); (A_1C_5, MC_9).

Triunghiurile MC_1E_1, MD_2E_2, MD_3E_3, MD_4E_4, MD_5A_1 sunt triunghiuri isoscele, având:

$$\sphericalangle MC_1E_1 = \sphericalangle ME_1C_1 = \sphericalangle MD_3E_3 = \sphericalangle ME_3D_3 = \sphericalangle MD_4E_4 =$$

$$= \sphericalangle ME_4D_4 = \sphericalangle MD_5A_1 = \sphericalangle MA_1D_5 = 9\varphi \qquad \left(\text{unde } \varphi = \frac{\pi}{19}\right),$$

deci

(1) $$\overline{ME_1} = \overline{MC_1};\ \overline{ME_2} = \overline{MD_2};\ \overline{ME_3} = \overline{MD_3};\ \overline{ME_4} = \overline{MD_4};\ \overline{MD_5} = \overline{MA_1}.$$

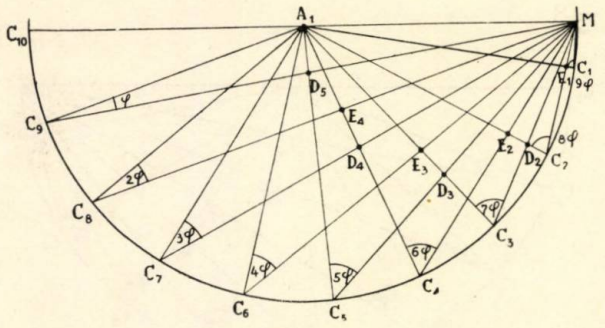


Figura 2.

De altă parte avem:

(2) $$\overline{E_1C_2} = \overline{A_1E_4} = \overline{D_2C_3};\ \overline{E_2C_4} = \overline{A_1E_3} = \overline{D_3C_5};\ \overline{E_3C_6} = \overline{A_1E_2} = \overline{D_4C_7};\ \overline{E_4C_8} = \overline{A_1E_4} = \overline{D_5C_9},$$

căci perechile de triunghiuri, următoare, sunt egale:

$(\Delta A_1E_1C_2,\ \Delta C_8A_1E_4)$ şi $(\Delta A_1D_2C_3,\ \Delta MA_1E_4)$; $(\Delta A_1E_2C_4,\ \Delta C_6A_1E_3)$ şi $(\Delta A_1D_3C_5,\ \Delta MA_1E_3)$;

$(\Delta A_1E_3C_6,\ \Delta C_4A_1E_2)$ şi $(\Delta A_1D_4C_7,\ \Delta MA_1E_2)$; $(\Delta A_1E_4C_8,\ \Delta C_2A_1E_1)$ şi $\Delta A_1D_5C_9,\ \Delta MA_1E_1)$.

Ţinând seamă de relaţiile (1) şi (2), avem imediat:

$$\overline{MC_1}+\overline{MC_3}+\overline{MC_5}+\overline{MC_7}+\overline{MC_9} = \overline{ME_1}+\overline{MD_2}+\overline{D_2C_3}+\overline{MD_3}+\overline{D_3C_5}+\overline{MD_4}+\overline{D_4C_7}+\overline{MD_5}+\overline{D_5C_9} =$$

$$\overline{ME_1}+\overline{E_1C_2}+\overline{ME_2}+\overline{E_2C_4}+\overline{ME_3}+\overline{E_3C_6}+\overline{ME_4}+\overline{E_4C_8}+\overline{MA_1} = \overline{MA_1}+\overline{MC_2}+\overline{MC_4}+\overline{MC_6}+\overline{MC_8}.$$

Demonstraţia se aplică întocmai pentru p număr impar oarecare. C. C. T. D.

Observări. I. Pentru orice poligon regulat (convex) în care numărul laturilor nu este o putere a lui 2, obţinem proprietăţi din acea tratată mai sus în care numărul laturilor poligonului convex regulat este număr impar, aplicând proprietatea pentru un număr de poligoane convexe regulate de un număr de laturi impar, divizor al numărului n.

De exemplu, pentru poligonul regulat de *30* laturi, putem obţine relaţiile între distanţele unui punct de pe cercul circumscris poligonului la vârfurile acestui poligon considerând *10* triunghiuri echilaterale înscrise în acel cerc, sau *6* pentagoane convexe regulate înscrise în acel cerc.

II. Evident, în acelaşi fel pot fi găsite relaţiile corespunzătoare pentru cazul poligoanelor stelate regulate de un număr oarecare de laturi care nu este o putere a lui 2.

III. Dacă un poligon regulat are un număr par de laturi proprietatea, pentru cazul particular când M este *mijlocul* unui arc, este evidentă din cauza simetriei figurei în raport cu diametrul punctului M.

Dacă avem un *poligon regulat de un număr de laturi, care este o putere a lui 2,* iar M nu este în mijlocul unui arc întins de una din laturi, proprietatea (P) nu este adevărată.

Dăm aci o demonstraţie pentru cazul patratului.

Fie patratul $A_1A_2A_3A_4$ înscris în cercul O şi M un punct al arcului A_1A_4, astfel ca:

(1) $$\text{arc } A_1M < \text{arc } MA_4,$$

fie încă N şi P proiecţiile lui M pe A_1A_3 şi A_2A_4, iar M′ şi M″ simetricile lui M în raport cu aceste diametre.

Să arătăm că nu putem avea:

(2) $$\overline{MA_1}+\overline{MA_3}=\overline{MA_2}+\overline{MA}.$$

În adevăr, avem:

(3) $$\overline{MA_1}^2+\overline{MA_3}^2=\overline{MA_2}^2+\overline{MA_4}^2=4R^2.$$

Dar $\overline{MM'}<\overline{MM''}$, căci: 2 arc $MA_1<2$ arc MA_4, deci înălţimile $\overline{MN}$ şi $\overline{MP}$, jumătăţile coardelor MM′ şi MM″, sunt în acelaşi raport,

(4) $$\overline{MN}<\overline{MP},$$

iar ca urmare ariile triunghiurilor dreptunghiuri A_1MA_3 şi A_2MA_4, având bazele egale, sunt în acelaşi raport cu înălţimile $\overline{MN}$ şi $\overline{MP}$. Aşadar, având

(5) $$2\,\overline{MA_1}\cdot\overline{MA_3}<2\,\overline{MA_2}\cdot\overline{MA_4}$$

şi aproprind această relaţie de relaţia (3), avem:

$$(MA_1+MA_3)^2<(MA_2+MA_4)^2,$$

de unde rezultă proprietatea enunţată pentru patrat.

IV. În acelaşi fel putem proceda pentru poligoanele convexe regulate de un număr $2^p\,(p>2)$ laturi.

V. Pentru triunghiul echilateral, reciproca proprietăţii este adevărată: Dacă distanţele unui punct M la vârfurile unui triunghiu echilateral sunt astfel că, una din ele este egală cu suma celoralte două, punctul M aparţine cercului circumscris triunghiului.

Septemvrie 1941.

NOTE MATEMATICE

21. — *Résoudre en entiers l'équation*

$$x^2-y^4=z^3.$$

Nous résoudrons d'abord

$$x^2-t^2=z^3$$

par les formules

$$x=m^3+3mn^2,\quad t=3m^2n+n^3,\quad z=m^2-n^2.$$

Il faut encore poser

$$3m^2n+n^3=y^2,\quad \text{ou}\quad n(n^2+3m^2)=y^2,$$

équation satisfaite pour

$$n^2+3m^2=y'^2,\qquad n=y''^2.$$

Pour $n^2+3m^2=y'^2$, on a

$$n=p^2-3q^2,\quad m=2pq,\quad y'=p^2+3q^2.$$

On a ensuite

$$n=p^2-3q^2=y''^2.$$

Donc

$$p=r^2+3s^2,\quad q=2rs,\quad y''=r^2-3s^2.$$

On a donc une solution à 2 paramètres indépendants, r et s.

Exemple numérique. $r=2$, $s=1$.

$$175784^2-97^4=3135^3,$$

en effet

30.900.014.656 —	175.784^2 —
88.529.281	97^4
30.811.485.375	3135^3

A. GLODEN

22. — *Notă asupra unei integrale difinite.*

Intr'un articol apărut de curând în „Revista Matematică din Timişoara“ [1] am indicat condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala

(1) $$\int_0^1 \frac{\sqrt{U}\cdot\frac{ds}{dU}}{\sqrt{(1-u).u}}\,du,\quad (\text{unde } U=u.u_0),$$

să fie independentă de parametrul u_0. Trebuia pentru aceasta ca funcţia $\sqrt{U}\cdot\frac{ds}{dU}$ să fie constantă. Cum demonstraţia riguroasă mi se părea prea dificilă şi astfel chiar lipsită de interes pentru cititorii Revistei, am schiţat-o în notă, rămânând ca să revin cu altă ocazie asupra acestei chestiuni.

Voi da aici totuşi demonstraţia riguroasă, plasându-mă într'un caz general; care poate fi la rândul lui extins în mai multe feluri.

Integrala (1) este de forma

(2) $$\int_0^1 \frac{A(U).du}{\sqrt{(1-u).u}},$$

unde A(U) este o funcţie continuă de produsul $u.u_0=U$. Dacă aceasta funcţie e constantă, evident integrala va fi independentă de u_0; condiţia e deci suficientă.

[1]) Anul XXI. No. 6. pag. 67.

Pentru a arăta că ea este şi necesară, să presupunem că integrala (2) este constantă şi egală cu πk şi să arătăm că această ipoteză atrage după sine $A(U) = \text{Const}$, adică funcţia A trebuie să se reducă la o constantă. Pentru aceasta să considerăm diferenţa

$$(3)\quad \int_0^1 \frac{A(U)\,.\,du}{\sqrt{(1-u)\,.\,u}} - \pi k = \int_0^1 \frac{A(U)-k}{\sqrt{(1-u)\,.\,u}}\,du,$$

care e nulă prin ipoteză şi să facem schimbarea $u = \frac{U}{u_0}$, U fiind noua variabilă de integrare. Obţinem expresia

$$(4)\quad \int_0^{U_0} \frac{A(U)-k}{\sqrt{(u_0-U)\,.\,U}}\,dU$$

din care, cu un raţionament simplu datorit lui *Appel* [2], se poate deduce că numărătorul elementului diferenţial trebuie să fie nul dacă integrala e nulă *oricare ar fi parametrul* u_0. Intr'adevăr, dacă acest numărător ar fi diferit de zero într'un interval $(0, a)$ unde păstrează astfel un semn constant, se poate alege u_0 în acest interval aşa că elementul diferenţial (4) ar avea şi el acelaş semn pentru $0 \leqq U \leqq u_0$. Rezultă deci că integrala (4) nu mai poate fi nulă şi această contradicţie atrage după sine $A(U) - k \equiv 0$. Condiţia e deci şi necesară. E clar că funcţia $A(U)$ considerată trebuie să fie continuă în intervalul $(0, u_0)$.

RADU BADESCU

---

23. — *Asupra convergenţei unor şiruri.*

I. Voi arăta că şirul

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

este crescător şi mărginit.

1. *Şirul este crescător odată cu n*, adică avem neegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

sau

$$1+\frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

pentru oricare ar fi n întreg, pozitiv.

[2]) Cours de Mécanique. T. I. IV-ème édition. pag. 377.

Ţinând seama de neegalităţile mediilor aritmetică, geometrică şi armonică a mai multor numere pozitive, se vede că membrul întâi al neegalităţii este media aritmetică, iar membrul doi este media geometrică

$$A = \frac{1+\frac{1}{n}+\cdots+1+\frac{1}{n}+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1} \quad \text{şi} \quad G = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,.\, 1}$$

a numerelor

$$1+\frac{1}{n},\ (\text{de } n \text{ ori}) \ldots 1+\frac{1}{n},\ \text{iar } A > G.$$

2. *Şirul este mărginit superior.*

Arătăm că pentru orice n întreg şi pozitiv există neegalităţile

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4.$$

Prima este evidentă. La a doua extragem rădăcina $n+1$ din ambii membri

$$1+\frac{1}{n} < \sqrt[n+1]{4.}$$

Membrii întâi şi doi sunt respectiv mediile armonică şi geometrică a numerelor 2, 2, 1, . . . (de $n-1$ ori):

$$G = \sqrt[n+1]{2\,.\,2\,.\,1\ldots1} = \sqrt[n+1]{4}$$

şi

$$H = \frac{n+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\cdots+1} = \frac{n+1}{n}.$$

Intre ele se cunoaşte neegalitatea:

$$H < G.$$

Şirul

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

este crescător şi mărginit; în consecinţă este convergent. Limita lui s'a notat cu e şi are multă importanţă în Matematică.

II. La fel se arată că şirul

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

este mărginit şi crescător.

1. *Şirul este crescător,* adică avem neegalitatea

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

sau

$$1-\frac{1}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}.$$

Membrul I şi membrul II al neegalităţii sunt respectiv mediile aritmetică şi geometrică a numerelor pozitive

$$1-\frac{1}{n},\ \ldots \text{ (de } n \text{ ori)} \ldots, 1.$$

2. *Şirul este mărginit.* Avem neegalităţile

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}<\frac{1}{2}.$$

Prima neegalitate este evidentă. La a doua membrul I şi II sunt respectiv mediile armonică şi geometrică a numerelor

$$\frac{1}{2},\ \text{(de } n-2 \text{ ori)}.$$

III. Pentru demonstrarea convergenţii şirurilor

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \quad \text{şi} \quad \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}$$

observăm că dela un n destul de mare semnul termenilor nu mai depinde de x ci vor fi pozitivi şi le putem aplica criteriile anterioare.

În cazul când n este un număr oarecare, sunt artificii clasice simple, care arată cu uşurinţă că teoremele sunt valabile şi în acest caz.

BAL LASCU

CHESTIUNI DE EXAMEN
ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examenul de admitere în anul I.
Lucrări scrise, 20 şi 21 Octomvrie 1941.

GEOMETRIE.

I.

Un dreptunghiu variabil ABCD are vârful A *fix*, orientarea laturilor AB şi AD neschimbată, iar perimetrul lui constant.

a. Să se găsească locul vârfului C.

b. Să se dea şi o soluţie prin geometria elementară pură.

II.

Pe laturile unui unghiu $x\,o\,y$, oarecare, sunt aşezate două segmente O A şi O A′ variabile şi proporţionale cu două lungimi date m şi n, iar pe segmentele OA şi OA′ sunt construite triunghiurile echilaterale OMA şi OM′A′.

a. Care este locul intersecţiei dreptelor MA şi M′A′?

b. Să se dea şi o soluţie prin geometria elementară pură.

c. Aceaşi problemă pentru cazul când triunghiurile echilaterale sunt înlocuite prin două două triunghiuri asemenea oarecare

(Timp acordat 2½ ore).

ALGEBRA

I.

Se dă ecuaţia

(1) $$x^2+px+q=0$$

cu rădăcinile x_1, x_2 şi se cere:

1°. Să se formeze o ecuaţie de gradul al 2-lea cu rădăcinele,

$$y_1=x_1^2-\frac{8}{x_1^2},\quad y_2=x_2^2-\frac{8}{x_2^2}.$$

2°. Dându-se $y_1=-7$, $y_2=2$, se cere să se rezolve ecuaţia (1).

II.

Să se determine a astfel ca funcţiunea

$$y=\frac{ax}{(x+1)^2+a^2x^2}-\operatorname{arc}\,tg\,\frac{ax}{x+1},$$

să admită un maxim pentru $x=-\frac{1}{2}$.

III.

Să se determine k astfel ca ecuaţia

$$3x^4-k^2x^3+4x^2-3x+1=0,$$

să aibă două rădăcini egale şi de semne contrare; în acest caz să se rezolve ecuaţia dată.

(Timp acordat, 2½ ore).

MECANICĂ ŞI TRIGONOMETRIE.

1. In vârful A al unui triunghiu ABC se aplică o forţă, reprezentată în mărime şi direcţie prin înălţimea AA′. Se descompune această forţă în două componente F_1 şi F_2, dirijate respeciiv după laturile AB şi AC, Să se calculeze mărimile acestor două forţe în funcţiune de elementele triunghiului, presupuse cunoscute.

2. In vârfurile B şi C se aplică respectiv forţele f_1 şi f_2 dirijate ambele după direcţia laturii B C şi aşa fel ca rezultantele R_1 şi R_2 ale perechilor de forţe (F_1, f_1), (F_2, f_2) să fie dirijate respectiv după înălţimile BB′ şi CC′. Să se calculeze mărimile forţelor f_1 şi f_2.

3. Să se calculeze mărimea şi poziţia rezultantei R a forţelor R_1 şi R_2 şi să se explice rezultatul.

4. Cum trebue să fie triunghiul ABC pentru ca R_1, R_2 şi R să fie laturile unui triunghiu dreptunghiu, în care R este ipotenuza?

(Timp acordat 2½ ore).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVII, No. 2, Octomvrie 1941. Relativ la o configurație din triunghiu, *Iulian Petrescu*. Concursul „Gazetei Matematice" din 1942. Note matematice, probleme rezolvate și propuse

2. *Boletin Matematico*, An. XIV, No. 10, Iulie 1941, Buenos-Aires. Indice general a problemelor publicate în timpul primelor 5000 zile a „Buletinului Matematic", 1 Ianuarie 1928 până la 8 Septemvrie 1941, de *A. Amenta*.

3. *Letterio Toscano*. Formule di addizione e moltiplicazione sui polinomi di *Laguerre*.

4. *I. G. Murgulescu* Die Löslichkeit und die freie Energie des silberchromats.

5. *Dr. Ing. Șt. Nadașan* Incercarea fontei în caetele noastre de sarcini.

6. *Dr. Ing. Ștefan Nadașan*. Cercetarea pieselor rupte în serviciu.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1044 — AB *fiind o coardă a unui cerc și* M *un punct oarecare pe acest cerc, fie* C *polul dreptei* AB *în raport cu cercul. Paralela dusă prin* C *la* AB *taie dreptele* MA *și* MB *în* D *și* E. *Să se arate că*

$$DC \cdot CE = \overline{AC}^2,$$

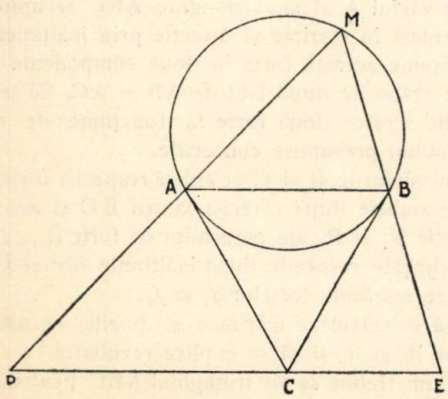
oricare ar fi punctul M *pe cerc, adică punctele* D *și* E *determină o involuție pe dreapta pe care se găsesc.*

N. ABRAMESCU

Avem egalitatea unghiurilor

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MBF = \sphericalangle EBC,$$

$$\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \sphericalangle BCE.$$



Triunghiurile ADC, EBC au două unghiuri egale, sunt asemenea și deci

$$\frac{DC}{AC} = \frac{CB}{CE}.$$

Observând că $AC = CB$, obținem

$$DC \cdot CE = \overline{AC}^2 = \text{const.}$$

Această relație probează că punctele (D, E) descriu o involuție pe dreapta considerată, cu punctul central C interior perechilor de puncte (D, E). De aci rezultă o metodă mai simplă de a construi pe o dreaptă perechi de puncte în involuție, când sunt date punctul central și puterea de involuție, și în acest scop a și fost propusă.

Au rezolvat problema D-na *Bratu Mariana* și D-nii *Boeriu Vasile, Breazu M. Mihail, Chircă Mihaiu, Coandă Virgil, Cosniță Cezar, Dan Traian, Iliescu M. Emilian, Ivănescu Cezar, Margulius Marius, Mereuță Emilian, Mihăileanu N N, Motoc Mircea, Păunescu N, Popa B. Ioan, Popescu C. Ștefan, Reghiș Pavel, Süli Mihai, Stoica Dumitru, Tăutu Ștefan, Trică Ioan, Trofin Cornel.*

D-l *Mihăileanu N. N.* a comunicat că prima parte a problemei a fost generalizată și pentru o conică, în „Journal de Math. élémentaires", 56 année, 1931. p. 22, în problema 11436.

N. A.

Problema 1602. — *Să se găsească numărul de patru cifre* $abcd$, *egal cu produsul dintre* 3^n *și numărul de două cifre* ad

G-L GH. BUICLIU

Pentru ca produsul $3^n ad$ să aibă patru cifre trebue ca n să fie cel puțin 3 și cel mult 4.

3^4 se termină cu 1, deci d poate fi orice cifră.

3^3 se termină cu 7, deci $3^3 ad$ se termină cu d, dacă $d = 5$.

Să considerăm mai întâiu cazul $n = 3$, $d = 5$. Avem

$$N = 1000a + 100b + 10c + 5 = 27(10a + 5),$$

sau

$$73a + 10b + c = 13,$$

egalitate imposibilă, căci $a \neq 0$.

Să luăm cazul $n = 4$. Avem

$$N = 1000a + 100b + 10c + d = 81(10a + d),$$

sau

$$1) \qquad 19a + 10b + c = 8d,$$

care trebue satisfăcută în întregi pozitivi de o cifră. O putem scrie

$$8d - 10b - c = 19a.$$

Cum $8d \leq 72$, rezultă $a \leq 3$, deci $a = 1, 2, 3$.

Să examinăm, pe rând, aceste trei cazuri:

1°. $a=1$. (1) devine

$$8d-10b-c=19, \tag{2}$$

care arată că $d\geq 3$. Avem tabloul

d	3	4	5	6	7	8	9
b	0	1	2	2	3	4	5
c	5	3	1	9	7	5	3

din care deducem soluţiile

1053, 1134, 1215, 1296, 1377, 1458, 1539.

2°. $a=2$. (1) devine

$$8d-10b-c=38,$$

care arată că $d\geq 5$. Avem tabloul

d	5	6	7	8	9
b	0	1	1	2	3
c	2	0	8	6	4

care dă soluţiile

2025, 2106, 2187, 2268, 2349.

3°. $a=3$. (1) devine

$$8d-10b-c=57,$$

deci $d\geq 8$. Dacă $d=8$, avem $b=0$, $c=7$, cu soluţia 3078. Dacă $d=9$, avem $b=1$, $c=5$, cu soluţia 3159.

Problema admite deci soluţiile

1053, 1134, 1215, 1296, 1377, 1458, 1539,

2025, 2106, 2187, 2268, 2349, 3078, 3159,

în număr de *patrusprezece*.

Notă. 1°. Au găsit, pe căi mai lungi, toate soluţiile, d nii: *Cetăţeanu St.*, *Dăscălescu Hr.*, *Modâlcă E.*, *Moldovan C.*, *S-lt Popescu Adrian*, *Stamate I* şi *Tilică St.*

2°. Au mai găsit soluţii d nii: *Anițescu N.* (9), *Berinde T.* (0), *Jidanu C.* (11), *Matei D.* (7), *Roth Alex.* (1), *Segal Z.* (7), *Selmereanu H.* (1).

M. G.

Problema 1675. — *Să se determine triunghiurile dreptunghice, în numere întregi, a căror perimetru este un cub.*

A. GLODEN

Fie x, y, z laturile triunghiului; trebue să avem

$$x^2+y^2=z^2, \quad x+y+z=u^3,$$

toate necunoscutele fiind întregi pozitivi. Prima este o ecuaţie pitagoriană cu soluţia

$$x=k\,(m^2-n^2), \quad y=2\,k\,m\,n, \quad z=k\,(m^2+n^2),$$

unde m, n sunt întregi, arbitrari primi între ei, iar k un alt întreg arbitrar. A doua ecuaţie devine

$$2\,k\,m\,(m+n)=u^3. \tag{α}$$

Cum m şi $m+n$ sunt întregi primi între ei, fie ei

$$m=\alpha\beta^2\gamma^2, \quad m+n=\lambda\mu^2\nu^3,$$

vom avea

$$2\,k\,\alpha\lambda\beta^2\mu^2\gamma^3\nu^3=u^3$$

şi cum α, β, λ, μ sunt prime între ele, trebue să avem $2k=\alpha^3\lambda^2\beta\mu p^3$, p fiind un alt întreg arbitrar, Vom avea deci soluţia generală

$$\begin{aligned} 2x&=\alpha^2\beta\lambda^3\mu^3\nu^3p^3(2\,\alpha\beta^2\gamma^3-\lambda\mu^2\nu^3),\\ y&=\alpha^3\beta^3\gamma^3\lambda^2\mu p^3(\lambda\mu^2\nu^3-\alpha\beta^2\gamma^3),\\ 2z&=\alpha^2\beta\lambda^2\mu p^3(\lambda^2\mu^4\nu^6-2\lambda\mu^2\nu^3\alpha\beta^2\gamma^3+2\alpha^2\beta^4\gamma^6),\\ u&=\alpha\beta\lambda\mu\nu p, \end{aligned}$$

depinzând de şapte parametrii arbitrari. Este posibil ca această soluţie să se poată simplifica prin micşorarea numărului parametrilor.

Notă. 1°. In afară de *Jidanu D. C.*, care a ajuns la egalitatea (α) dar a descompus în mod particular pe u^3, toţi aşa zişii rezolvitori ai problemei au găsit soluţii numerice, mai precis câte una.

2°. Autorul problemei a indicat soluţia care se deduce din (A) luând $\alpha=\lambda=\mu=p=1$, $\beta=2$.

3°. Un student al unei Facultăţi de Ştiinţe a afirmat că toate triunghiurile dreptunghice au laturile proporţionale cu 3, 4, 5! Această este adevărat numai dacă sunt şi asemenea (*„Gazeta Matematică“*, problema? propusă de *Ionescu R. I.*).

M. G.

Problema 1828. — *Să se elimine x, y, z şi α din expresiunile*

$$\frac{(x-\alpha)(y-z)}{x+\alpha)(y+z)}=u, \quad \frac{(y-\alpha)(z-x)}{(y+\alpha)(z+x)}=v, \quad \frac{(z-\alpha)(x-y)}{(z+\alpha)(x+y)}=w.$$

IONEL I. STAMATE

Aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor se obţine din fie-care expresiune

$$\frac{1+u}{1-u}=\frac{xy+\alpha z}{xz+\alpha y}$$

$$\frac{1+v}{1-v}=\frac{yz+\alpha x}{yx+\alpha z}$$

$$\frac{1+w}{1-w}=\frac{zx+\alpha y}{xy+\alpha x},$$

de unde, prin înmulțire, se obține eliminantul

$$(1)\qquad \frac{(1+u)(1+v)(1+w)}{(1-u)(1-v)(1-w)}=1$$

Dacă se presupune $u\neq v\neq w\neq 1$ atunci (1) se poate pune sub forma

$$(2)\qquad u+v+w+uvw=0.$$

Pentru a se ajunge la (1) trebuie ca nici una din sumele $xy+\alpha z$, $zx+\alpha y$, $yz+\alpha x$ să nu fie nulă.

Eliminantul pus sub (1) sau (2) impune prin urmare anume condiții numerelor x, y, z, α, u, v, w, ceiace este natural fiind dat că se cere eliminarea a 4 mărimi din 3 relațiuni.

Au găsit eliminantul sub una din formele (1) sau (2) însă fără a observa că $x, y, \ldots w$ trebuie să îndeplinească anume condiții: D-ra *Checian N. Ana* (Studentă, Timișoara) și d-nii *Bakonyi C.* (Liceul „Diaconovici Loga", Timișoara); *Boleanțu L.* și *Negrea A. M.* (Brăila).

Autorul acestei probleme a propus-o și în „Gezeta Matematică" sub Nr. 5426 la 15 Ianuarie 1941.

G-l G. B.

PROBLEME PROPUSE

1986. — Să se formeze un patrat perfect de 8 cifre întrebuințând de câte două ori fiecare din cifrele 0, 4, 7 și 9.

G-l Gh. Buiclău.

1987. — Numerile a, b, c formează o progresie geometrică a cărei sumă este 124; adăogând termenului mijlociu pe 32, progresia devine aritmetică. Să se determine cele trei numere.

Florian I. Goga

1988. — Presupunând $a\neq 1$, să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x+by+z=a \\ ax+y+yz=1 \\ x+ay+z=b \end{cases}$$

Cornelia Nanes

1989. — Să se dea condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții ecuației

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

pentru ca rădăcinile acestei ecuații să fie laturile unui triunghiu, a cărui arie nu este zero.

Th. Angheluta

1990. — In vârfurile A_1, A_2, A_3, A_4 a unui tetraedru regulat, de muchie a, se așează patru puncte materiale de mase m_1, m_2, m_3, m_4. Să se calculeze distanțele baricentrului acestor mase la vârfuri și la centru de greutate a tetraedrului.

V Thébault

1991. Dacă,

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-(b+c)^2}}{b+c},\quad y=\frac{b+\sqrt{b^2-(c+)a^2}}{c+a},$$

$$z=\frac{c+\sqrt{c^2-(a+b)^2}}{a+b}$$

atunci există relația:

$$E=\left(\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{z-1}{z+1}\right)^2=-\frac{p^2+2Rr+r^2}{4p^2},$$

a, b, c, p, R, r fiind notații obicinuite într'un triunghiu oarecare.

Ionel I. Stamate

1992. — Să se stabilească relațiile:

$$\frac{8}{\alpha\beta\gamma}=\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\prod\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

$$\frac{8}{\alpha'\beta'\gamma'}=\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\operatorname{co\,sec}\frac{B}{2}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}\prod\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),$$

în care α, β, γ, și $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt respectiv bisectorale interioare și exterioare, iar celelalte sunt notațiile cunoscute dintr'un triunghiu oarecare.

Hr St. Dascalescu

1993. — Intr'un triunghiu dreptunghic ABC avem relația

$$(ab+2pc)\,\mathrm{cp}\,B=2ac\cos^2\frac{B}{2},$$

notațiile fiind cele obicinuite, iar cp B însemnând *cosinusul patratic a lui B.*

V. Alaci

ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA

Candidaţii reuşiţi la examenul de admitere în anul preparator, în ordinea clasificaţiei

(*Anul şcolar 1941—1942*).

1. **Bakonyi Coloman,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
2. **Moş T. Ioan Mihai,** Lic. Samuil Vulcan Beiuş.
3. **Luca Il. Ioan,** Lic. Moise Nicoară Arad.
4. **Pelecudi Sp. Cristian,** Lic. Mihai Viteazul Bucureşti.
5. **Abrudan V. Vasile,** Lic. Samuil Vulcan Beiuş.
6. **Marin N. Ioan,** Lic. CFR Aurel Vlaicu Bucureşti.
7. **Zugravu C. Cezar,** Lic. V. Alexandrii Galaţi.
8. **Budu I. Tiberiu,** Lic. A. Mureşan din Dej.
9. **Pop O Emil,** Lic. Sft. Vasile Blaj.
10. **Saghin A. Victor,** Lic. Aron Pumnul Cernăuţi.
11. **Bernath A. Mihail,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
12. **Boleanţu M. Cezar,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
13. **Copăceanu D. Dimitrie,** Lic. Samuil Vulcan Beiuş.
14. **Michalczyk Zbigniew,** Lic. Polonez Craiova.
15. **Dehelean N. Gheorghe,** Lic. Samuil Vulcan Beiuş.
16. **Frunză V. Arcadie,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
17. **Langu St. Nicolae,** Lic. Ioniţă Asan Caracal.
18. **Popescu I. Gh. Adrian,** Lic. Carol I. Craiova.
19. **Popa Il. Ioan,** Lic. Aurel Vlaicu Orăştie.
20. **Rădulescu N. Gheorghe,** Lic. Sft. Petru şi Pavel Ploeşti.
21. **Ş'poş I. Ioan,** Lic. Mircea cel Bătrân Constanţa.
22. **Ştefan I. Petru,** Lic. de băeţi din Petroşani.
23. **Brădăţan Il. Ilie Traian,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
24. **Maior V. Tiberiu,** Lic. N. Bălcescu Brăila.
25. **Florica Em. Gheorghe,** Lic. băeţi Turnu-Măgurele.
26. **Petrennel I. Iosif,** Lic. Banaţia Timişoara.
27. **Ştefănescu I. Cristofor,** Lic. N. Bălcescu Brăila.
28. **Andreescu V. Vasile,** Lic. Cor. Brediceanul Lugoj.
29. **Bejan S. Ioan,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
30. **Nicolau D. Marcu,** Lic. Nona Filadelfia-Grecia.
31. **Popescu D. Emil,** Lic. N. Bălcescu Brăila.
32. **Trica A. Renee,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
33. **Strizu Th. Ioan,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
34. **Uidilă N. Ioan,** Lic. Traian Turnu Severin.
35. **Clepea P. Ioan,** Lic. Moise Nicoară Arad.
36. **Dumitrescu D. Ştefan,** Lic. Carol I. Craiova.
37. **Tatomirescu D. Teodor,** Lic. Carol I. Craiova.
38. **Tenţea M. Dinu,** Lic. Gh. Lazăr Sibiu.
39. **Tuţureanu V. Octavian,** Lic. Radu Negru Făgăraş.
40. **Luncan I. Traian,** Lic. Samuil Vulcan Beiuş.
41. **Neaga M. Alexandru,** Lic. Decebal Deva.
42. **Marcu St. Gheorghe,** Lic. V. Alexandrii Galaţi.
43. **Romanu T. Teodor,** Lic. Traian Doda Caransebeş.
44. **Rusu Gh. Gheorghe,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
45. **Tanco-Costangioară D. Nic.,** Lic T.raian Doda Caransebeş.
46. **Bolohan I. Ioan,** Lic. Gh. Bariţiu Cluj.
47. **Dobrescu I. Alexandru,** Lic. I. C. Bratianu Piteşti.
48. **Fulea N. Dobrin Augustin,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
49. **Moru I. Aurel,** Lic. Internat Iaşi.
50. **Ştubei T. Petru,** Lic. Moise Nicoară Arad.
51. **Vasioiu I. Corneliu,** Lic. N. Bălcescu Brăila.
52. **Bălteanu R. Iulian,** Lic. I. C. Brătianu Piteşti.
53. **Goanţă I. Mircea,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
54. **Maliţa V. Aurel,** Lic. Samuil Vulcan Beiuş.
55. **Voiu S. Horaţiu,** Lic. Cor. Bredicianul Lugoj.
56. **Georgescu C. Nicolae,** Lic. băeţi Piteşti.
57. **Haasz I. Egon,** Lic. Piarist Timişoara.
58. **Hajdu I. Iosif,** Lic. Industrial Braşov.
59. **Micşunescu St. Petru Ştef.,** Lic. N. Bălcescu Brăila.
60. **Negreanu A. Aurel,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
61. **Pârvulescu I. Octavian,** Lic. Fraţii Buzeşti Craiova.
62. **Chilom C. Constantin,** Lic. Aurel Vlaicu Orăştie.
63. **Dâmboviceanu P. Gheorghe,** Lic. D. Barbu Ştirbei Câmpina.
64. **Gaudy C. Constantin,** Lic. N. Bălcescu Brăila.
65. **Hurban A. Ioan,** Lic. Moise Nicoară Arad.
66. **Meţiu I. Gheorghe,** Lic. Decebal Deva.
67. **Benea P. Victor,** Lic. Gh. Lazăr Sibiu.
68. **Corfu I. Petru,** Lic. Spiru Haret Bucureşti.
69. **Raica A. Traian,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
70. **Albescu I. Ioan Sorin,** Lic. Tr. Doda Caranesebeş.
71. **Mărculescu V. Vasile,** Lic. Tudor Vladimirescu Tg.-Jiu.
72. **Moldovan A. Claudiu,** Lic. Sft. Vasile Blaj.
73. **Apostolescu Gh. Gheorghe,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
74. **Chevereşan D. Dumitru,** Lic. Traian Doda Caransebeş.
75. **Craiu I. Graţian,** Lic. Gh. Bariţiu Cluj.
76. **Rizescu D. Gheorghe Horea,** Lic. Mircea cel Bătrân Constanţa.
77. **Teleguţ I. Mircea,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
78. **Derlea Gh. Dragoş,** Lic. Ştefan cel Mare Suceava.
79. **Ionescu C. Viorel,** Lic. băeţi Turnu Măgurele.
80. **Marcoş I. Ioan,** Lic. Timotei Cipariu Dumbrăveni.
81. **Angheşescu I. Mihai Ioan,** Lic. N. Bălcescu Brăila.
82. **Cosma A. Ioan,** Lic. C. Diac. Loga Timişoara.
83. **Ene N. Gheorghe,** Lic. Mircea cel Bătrân Constanţa.
84. **Ioan T. Vasile,** Lic. Aurel Vlaicu Bucureşti.
85. **Preda I. Iosif Gheorghe,** Lic. Sft. Vasile Blaj.
86. **Vlad N. Nicolae,** Lic. Traian Doda Caransebeş.
87. **Avram A. Mircea,** Lic. Moise Nicoară Arad.
88. **Grecu M. Tiberiu,** Lic. Moise Nicoară Arad.
89. **Grindean A. Alexandru,** Lic. Regele Ferdinand I. Turda.
90. **Iurăşcu S. Haralamb,** Lic. Profesori Asociaţi Bucureşti.
91. **Burghelea A. Costeli,** Lic. Princip. Carol Tulcea.
92. **Rus S. Simion,** Lic. Radu Negru Făgăraş.
93. **Buta Gh. Petru,** Lic. I. C. Brătianu Piteşti.
94. **Chira T. Teodor,** Lic. Moise Nicoară Arad.
95. **Moldovan Gr. Mircea,** Lic. Titu Maiorescu Aiud.
96. **Oprea N. Iaroslav,** Lic. Fraţii Buzeşti Craiova.
97. **Orban T. Octavian Mircea,** Lic. Gh. Bariţiu Cluj.
98. **Arghir A. Nicolae,** Lic. CFR A. Vlaicu Bucureşti.
99. **Bârceru Gh. Vasile,** Lic. Traian Turnu Severin.
100. **Brătulescu I. Eugen,** Lic. Gh. Şincai Bucureşti.
101. **Pădurean P. Aurel,** Lic. Moise Nicoară Arad.
102. **Păsăreseu I. Paul,** Lic. Tudor Vladimirescu Tg. Jiu.
103. **Perian R. Virgil,** Lic. Gh. Lazăr Sibiu.
104. **Varga St. Ştefan,** Lic. Samuil Vulcan Beiuş.

Secretar: **V. BUCESCU.**

VII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XXI. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
50	110	I	
69	142	„	
92	187	„	89
98	187	„	85
100	14	II	85
110	14	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	85
164	94	„	86
175	110	„	
178	126	„	
185	126	„	
191	142	„	71
194	142	„	
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III	97
235	30	„	120
244	46	„	
255	62	„	72
259	62	„	86
268	78	„	
275	94	„	
291	126	„	
317	174	„	
344	30	IV	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	132
359	62	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	33
393	126	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	61
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
450	46	„	
458	62	V	
478	94	„	40
479	94	„	41
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
535	30	VI	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
658	102	„	
686	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
851	96	IX	
858	108	„	
860	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	
924	60	„	
938	84	„	
939	84	„	
954	108	„	
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	
1001	36	„	
1002	36	„	97
1008	48	„	
1012	48	„	
1017	60	„	61
1018	60	„	
1027	72	„	
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1044	96	„	110
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	138	„	
1077	138	„	
1085	12	XII	
1093	24	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1125	72	„	
1126	72	„	98
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1142	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1174	138	„	
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1195	36	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	XIII	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1231	84	„	62
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1280	24	„	
1289	36	„	
1295	36	„	
1299	52	„	
1300	52	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1322	88	„	
1323	88	„	
1325	88	„	
1327	88	XIV	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	

1).	2).	3).	4).
1370	12	XV	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1402	60	„	
1405	60	„	
1407	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	
1419	84	„	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1454	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	
1486	40	XVI	
1489	52	„	
1490	52	„	
1492	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1496	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1507	76	„	
1511	76	„	
1514	88	„	

1)	2).	3).	4).
1516	88	XVI	
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	
1536	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	
1545	124	„	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1568	12	„	
1571	24	„	
1574	24	„	
1575	24	„	
1577	24	„	
1581	36	„	120
1582	36	„	
1583	36	„	
1586	48	„	86
1588	48	„	
1589	48	„	
1594	60	„	134
1595	60	„	72
1600	60	„	
1602	72	„	110
1604	72	„	
1605	72	„	
1607	72	„	134
1609	72	„	
1610	84	„	98
1612	84	„	
1613	84	„	
1614	84	„	121
1615	84	„	
1618	96	„	
1621	96	„	
1622	96	„	
1624	96	„	
1626	108	„	98
1627	108	„	
1628	108	„	
1629	108	„	99

1).	2).	3).	4).
1630	108	XVII	135
1631	108	„	
1632	108	„	
1633	120	„	72
1634	120	„	73
1636	120	„	73
1637	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1642	132	„	122
1643	132	„	
1644	132	„	74
1645	132	„	
1646	132	„	
1880	92	XX	
1647	132	XVII	
1648	132	„	74
1651	144	„	
1652	144	„	
1653	144	„	
1654	144	„	
1656	144	„	
1658	12	XVIII	123
1659	12	„	146
1660	12	„	
1661	12	„	
1662	12	„	
1664	12	„	
1665	12	„	
1666	24	„	87
1667	24	„	
1668	24	„	
1669	24	„	99
1670	24	„	
1671	24	„	
1672	24	„	
1674	36	„	100
1675	36	„	111
1676	36	„	
1678	36	„	
1679	36	„	
1680	36	„	
1681	48	„	147
1682	48	„	135
1685	48	„	
1686	48	„	
1687	48	„	
1688	48	„	
1689	60	„	
1690	60	„	147
1691	60	„	
1692	60	„	123
1693	60	„	
1694	60	„	

1).	2).	3).	4).
1695	60	XVIII	
1696	60	„	147
1697	72	„	
1698	72	„	
1701	72	„	
1706	84	„	
1708	84	„	
1709	84	„	
1710	84	„	
1711	84	„	
1714	96	„	
1715	96	„	
1716	96	„	
1717	96	„	
1718	96	„	
1719	96	„	
1722	108	„	
1723	108	„	
1724	108	„	
1725	108	„	
	120	„	
1726	108	„	
1728	120	„	
1732	120	„	21
1733	120	„	
1737	132	„	
1739	132	„	
1740	132	„	
1741	132	„	
1742	132	„	
2744	149	„	
1747	149	„	
1749	149	„	
1750	149	„	
1754	16	XIX	
1755	16	„	
1756	16	„	
1821	156	„	
1758	16	„	
1759	16	„	
1762	28	„	
1763	28	„	
1764	28	„	
1767	28	„	
1865	68	XX	
1769	40	XIX	
1770	40	„	
1771	40	„	
1772	40	„	
1773	40	„	
1776	56	„	
1777	56	„	
1780	56	„	
1781	56	„	

1).	2).	3).	4).
1782	56	XIX	
1784	80	„	
1788	80	„	
1789	80	„	
1790	80	„	
1792	124	„	
1793	124	„	
1795	124	„	
1796	124	„	
1797	124	„	
1798	124	„	42
1800	124	„	
1802	136	„	
1803	136	„	
1804	136	„	33
1805	136	„	
1806	136	„	
1808	136	„	
1809	156	„	
1810	156	„	34
1811	156	„	
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1815	156	„	35
1816	156	„	
1817	169	„	
1818	169	„	22
1819	169	„	22
1820	169	„	
1822	169	„	
1823	169	„	45
1824	169	„	
	16	XX	
1825	169	XIX	
1826	16	XX	
1827	16	„	23
1828	16	„	111
1829	16	„	
1830	16	„	
1831	16	„	
1832	28	„	
1833	28	„	
1834	28	„	10
1835	28	„	
1836	28	„	
1837	28	„	23
1838	28	„	
1839	28	„	10
1840	28	„	45
1841	28	„	
1842	44	„	
1843	44	„	

1).	2).	3).	4).
1844	44	XX	
1846	44	„	
1847	44	„	
1848	44	„	46
1849	44	„	
1850	56	„	
1851	56	„	
1852	56	„	
1853	56	„	
1854	56	„	
1855	56	„	
1856	56	„	
1857	56	„	
1858	68	„	
1859	68	„	
1860	68	„	
1861	68	„	
1862	68	„	
1863	68	„	46
1865.	68	„	
1767.	28	XIX	
1866	80	XX	
1867	80	„	
1868	80	„	
1869	80	„	
1870	80	„	75
1871	80	„	47
1872	80	„	
1873	80	„	
1874	92	„	
1875	92	„	
1876	92	„	11
1877	92	„	
1878	92	„	
1879	92	„	63
1880	92	„	
1646	132	XVII	
1881	92	XX	
1882	104	„	
1883	104	„	63
1884	104	„	47
1885	104	„	
1886	104	„	
1887	104	„	
1888	104	„	
1889	104	„	
1890	116	„	
1891	116	„	
1892	116	„	
1893	116	„	
1894	116	„	
1895	116	„	
1896	116	„	
1897	116	„	

1).	2).	3).	4).
1898	128	XX	
1899	128	„	
1900	128	„	
1901	128	„	
1902	128	„	
1903	128	„	
1904	128	„	
1905	128	„	
1906	140	„	
1907	140	„	
1908	140	„	
1909	140	„	
1910	140	„	
1911	140	„	
1912	140	„	
1913	140	„	
1914	157	„	
1915	157	„	
1916	157	„	
1917	157	„	
1918	157	„	
1919	157	„	
1920	157	„	
1921	157	„	
1922	12	XXI	
1923	12	„	
1924	12	„	
1925	12	„	
1926	12	„	
1927	12	„	
1928	12	„	
1930	12	„	
1931	24	„	
1932	24	„	
1933	24	„	
1934	24	„	
1935	24	„	
1936	24	„	
1937	24	„	
1938	36	„	
1939	36	„	
1940	36	„	
1941	36	„	
1942	36	„	
1943	36	„	
1944	36	„	
1945	36	„	
1946	48	„	
1947	48	„	
1948	48	„	
1949	48	„	
1950	48	„	
1951	48	„	
1952	48	„	

1).	2).	3).	4).
1953	48	XXI.	
1954	64	„	
1955	64	„	
1956	64	„	
1957	64	„	
1958	64	„	
1959	64	„	
1960	64	„	
1961	64	„	
1962	76	„	
1963	76	„	
1964	76	„	
1965	76	„	
1966	76	„	
1967	76	„	
1968	76	„	
1969	76	„	
1970	88	„	
1971	88	„	
1972	88	„	
1973	88	„	
1974	88	„	
1975	88	„	
1976	88	„	
1977	88	„	
1978	100	„	
1979	100	„	
1980	100	„	
1981	100	„	
1982	100	„	
1983	100	„	
1984	100	„	
1985	100	„	
1986	112	„	
1987	112	„	
1988	112	„	
1989	112	„	
1990	112	„	
1991	112	„	
1992	112	„	
1993	112	„	
1994	124	„	
1995	124	„	
1996	124	„	
1997	124	„	
1998	124	„	
1999	124	„	
2001	124	„	
2002	136	„	
2003	136	„	
2004	136	„	
2005	136	„	

1).	2).	3).	4).	1)	2).	3).	4)	1).	2).	3).	4).	1).	2).	3)	4)
2006	136	„		2009	136	„		2012	148	„		2015	148	„	
2007	136	„		2010	148	„		2013	148	„		2016	148	„	
2008	136	„		2011	148	„		2014	148	„		2017	148	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E., 85.
Abramescu Pop Mariana, 45.
Abramescu N., 1, 32, 37, 48, 61, 81, 89, 97, 98, 110, 132, 148.
Adam M., 85.
Adam D. R., 1.
Adamescu M., 1.
Agapescu M. N., 41.
Alaci V., 1, 3, 4, 8, 12, 13, 21, 24, 25, 27, 28, 36, 37, 40, 48, 49, 50, 53, 62, 64, 65, 69, 70, 74, 76, 77, 78, 80, 82, 88, 89, 100, 101, 112, 113, 124, 125, 126, 136, 137, 144, 148.
Aldea A. M., 46, 47, 48, 64, 147.
Aldea V. M., 10, 24, 123, 136, 147.
Aldea V. V., 22.
Almăjan P., 1.
Aman C., 48.
Aman V. C., 23.
Amărăşteanu F. M., 122.
Amenta A., 110.
Anastasiade I., 1.
Anastasiu M., 121.
Andrievici G., 99.
Andrievici N., 75.
Andronescu P., 1, 10, 21, 33, 60 80 84, 119.
Andrunachievici V., 121.
Angelescu A., 6, 132.
Angheluţă Th., 1, 4, 8, 13, 28, 29, 60 70, 72, 78, 79, 80, 81, 82, 112 117.
Aniţescu N., 73, 75, 99, 100, 111, 121, 134, 147.
Anton G., 99, 100, 120, 147.
Appell P., 68.
Ardelean St., 1.
Aresteanu H., 123.
Arghir I., 1.
Arghiriade E. 21.
Atanasiu M. C., 41.
Augustin M., 147.
Avramescu A., 96.

Bădărău M. G., 119.
Bădescu R., 1, 12, 36, 67, 84, 108, 119.
Baidaff B. I., 1, 40, 61, 71 84, 96 132.
Bakony C., 1.
Bakony C., 10, 11, 22, 23, 24, 35, 45 46, 47, 48, 63, 64, 73, 75, 109 112, 123, 147, 148.
Bal Lascu, 109.
Bănărescu M., 1.
Barbelian D., 97.
Bărglăzan A., 1, 86.
Bârlea-Suhăţeanu G. V., 23, 100, 147.
Baron C., 1.
Bârs P., 41.
Becu C., 64.
Begu S., 121.
Belcot C., 96.
Beldi N. D., 41.
Bell Cl., 132.
Benedikt T. E., 71.
Beneş P., 1.
Berdan C. 72, 85, 86.
Berinde T., 111.
Bertrande, 10.
Berwald L., 132.
Beşchea N., 41, 42.
Bessel, 132.
Biernacki C., 85.
Blaşian V., 1.
Blasko Beatrice, 61.
Bobârnac M., 1, 72, 86, 97.
Bochvar, 119.
Boerescu P. S., 12.
Bogdan C. P., 21.
Boeriu V., 62, 98, 110.
Boiangiu D. D., 147.
Boleanţu L., 10, 23, 112.
Bonea I., 1, 124.
Bonnet M., 84.
Borneas M., 100, 147.
Bossi V., 97.
Botea G. N., 33, 86, 146.
Botea E., 146.
Botez M., 1, 119, 121, 124, 136, 148
Botez M., 1.
Botiş V., 97.
Brădăţeanu C. C., 61.
Brădeanu N., 22, 36.
Brătilă F. d-ra, 13 40.
† Bratu G., 1, 81, 119, 132.
Bratu Mariana, 110.
Breazu M., 110.
Budeanu C., 96.
Buicliu Gh., 1, 3, 13, 24, 33, 36, 48 61 64, 76, 86, 87, 88, 97, 100, 110, 112, 118, 120, 123, 124, 132, 136, 148.
Bujor T. A., 41.
Butlewski Z., 132.
Buznea D. D., 48, 75, 122.
Caligo D., 71.
Călin M. G., 41.
Călniceanu C., 1.
Călugăreanu G., 1, 21.
Cândea C., 1, 3.
Caracaş G., 41.
Cârlan S. N., 10.
Carnot L., 80, 122.
Cârstoiu I., 96.
Catona V., 1.
Cauchois I., 119.
Cavallaro G. V., 10
Cernat C., 121.
Cesari L., 71.
Cetate C., 123.
Cetăţeanu S., 46, 73, 75, 88, 100, 111, 121, 123, 135, 136, 147.
Checian N. Ana, 10, 12, 23, 34, 112 147, 148.
Cherţman M., 136, 147.
Chintescu M. M., 148.
Chircă M., 110.
Chircoiaşu N., 26, 61.
Chiriţă C., 96.
Ciceiu C., 147.
Ciorănescu N. 86, 96.
Claudian V., 1.
Coandă V., 98, 110.
Coca A., 1.
Cocea T., 36, 64 88.
Cojocariu V. I., 98.
Coman A., 1, 3.
Comănescu A., 1.
Constantinescu Al. 61.
Constantinescu G. G., 1, 10, 35.
Constantinescu Gh., 1.
Constantinesu G. I., 97.
Constantinescu V., 147.
Conta V., 119.
Contrea A., 1.
Cornăţeanu N., 96.
Corpaciu I. A., 96.
Coşereanu I., 86, 120.
Coşniţă C. 40, 41, 96, 98, 110.
Costăchescu V. C., 1, 8, 24, 76, 136
Court A. N., 132.
Cristea I. N., 10, 11, 22, 23, 24, 35 36, 46, 100, 123, 147.
Cristescu D., 147.
Cristescu I., 1, 62.
Cristescu V., 3, 46, 61.
Cristodulo N., 1.

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Cservény I., 1.
Curea I., 1, 10.

Dan T., 98, 110.
Dângă S. V., 41.
Dărmănescu I., 41.
Dăscălescu S. H., 62, 73, 87, 99, 100, 111, 112, 121, 123, 136, 147.
David I. I., 97.
Deciulescu D. G., 123.
Demetrescu G., 1.
Descartes, 40.
Destouches I. L., 10.
Diaconescu D. I. 75, 122, 136, 147.
Diaconescu M., 75, 99, 121, 123.
Diaconescu N., 1, 65.
Diaconu B. M., 61, 120.
Diavatz I., 41.
Dimitriu M., 97.
Dinescu P. F., 41.
Dinu S. D., 41.
Dinulescu N., 85.
Dobrescu A., 30, 39, 61, 71.
Dobrozemsky M., 1.
Dordea N., 41.
Dorneanu S. V., 33, 61.
Doscan A., 135, 147, 148.
Drăgan G., 41, 97, 99.
Dragomir M. D., 148.
Drogeanu M. P., 41.
Droz, 84.
Dumitrescu I. E. 41.
Dumitriu-Dada, 1, 97.

Emanuel David, 71, 132.
Enăchescu I., 147.
Euler L., 68.

Facsko I. G., 23, 64.
Fanelli E., 71.
Farny, 84.
Fermat, 13, 134.
Fibonacci, 85.
Florea C. A., 61.
Florea V. G., 41.
Florescu E. G., 64.
Florescu M., 1.
Flickstein J., 86.
Fofiu C., 62.
Fotino S., 96.
Frătici I., 1.
Francais, 146.
Fredholm, 84.

Galé G. I., 71, 96.
Gauss, 61, 96.
Gavrilescu N. I., 41.
Gavrilescu V., 41.
Georgescu B., 47, 124.
Georgescu C., 97.
Georgescu D., 1, 135.
Gergome, 146.
Germani D., 96.
Gheorghe C. A., 41.
Gheorghiu A., 21, 71.
Gheorghiu Th. Gh., 1, 40, 41, 46, 65, 72, 100, 120, 124.
Gheorghiu S., 12.
Gheorghiu C. T., 41.
Gheorghiu V., 1.
Gherbanovscki T. N., 41.
Ghermănescu M., 1, 12, 21, 36, 40, 59, 65, 70, 73, 74, 80, 85, 86, 87, 88, 92, 98, 99, 100, 111, 119, 121, 122, 123, 124, 134, 135, 136, 148.
Ghimiceanu I. G., 61.
Ghişoiu I. P., 41, 61.
Ghiţescu S. P., 1.
Ghiţescu V., 84.
Gligor N. I., 10, 12, 23, 46, 47, 48, 64, 73, 100, 123, 147.
Gloden A., 1, 9, 11, 12, 20, 21, 24, 36, 39, 46, 47, 48, 60, 61, 63, 64, 70, 71, 73, 74, 84, 88, 92, 99, 107, 111, 117, 123, 131 132, 134, 135, 145, 146.
Godeanu L., 132.
Goga F., 45, 100, 112, 136.
Goldstein M., 85.
Goldstein N., 134.
Gonzales G., 132.
Goursat, 68.
Gradin I. G., 41, 86.
Grofşoreanu I. G., 41.
Gröbner W., 71.
Grossu I. M., 41.
Grozăvescu D., 41.
Grumăzescu M., 22, 36 98, 119.
Guţu A., 96.

Haret Spiru, 84.
Hergopol G., 10.
Herlea V. V., 10, 34, 36.
Hermann C., 73, 123, 147.
Hibert, 119.
Hôspital, 24, 86.
Hostinsky B., 132.
Hristea H., 1.
Humbert P., 132.

Iacob C., 119, 132.
Iacob S. E., 41.
Ilie D. M., 96.
Iliescu I., 85.
Iliescu M., 61, 110.
Ioachimescu G. A., 3, 61.
Ioan N. G., 124.
Ioanin G., 98.
Ion I., 10.
Ioniţă M. I., 97.
Ionescu A., 41.
Ionescu B. A., 41.
Ionescu-Biss P. H., 1, 41, 61.
Ionescu-Bujor Th. A., 41.
Ionescu-Bujor C., 1, 71, 146.
Ionescu F. C., 41.
Ionescu I., 3, 21, 33.
Ionescu Longin, 85.
Ionescu M. M., 41.
Ionescu F. P., 124 147, 148.
Ionescu R., 111.
Ionescu V. Th., 119.
Ionescu-Tiu D. C., 1, 41, 99.
Ionescu D. V., 1, 4, 25, 81, 100, 132, 146.
Isăcescu T., 41.
Istinie-Brezuica I. C., 41, 86.
Iuga G., 40.

Jidanu C., 10, 72, 75 99, 100, 111, 122, 123, 135, 136, 147.
Jcachimstahl, 97.

Kaldor, 3.
Kassargian A., 97.
Katz F., 85, 86.
Kepler, 119.
Kielburger M., 1.
Kirchhoff, 96.
Koenigs, 119.
Kronecker, 4.
Kühn I., 1.

Laguarta G., 13, 14, 15, 16
Laguerre, 110.
Lalescu Tr., 3, 4.
Lambrino G., 1.
Landau, 132.
Laplace, 14.
Laţia C., 98.
Laţiu V., 2.
Lauricella, 119.
Lăzărescu I. I. 41.
Lefter C., 118.
Legrende, 146.
Leibnitz, 13, 71.
Leonida D., 2.
Lepădatu I. M., 41, 61.
Lepolszky C., 98.
Letac M., 38.
Liteanu G., 2.
Linteş I., 2, 10, 96, 119, 132.
Lobachewsky, 132.
Logofătu M. I., 22, 36.
Loziciu D. I., 88.
Luca I. I., 22, 23, 46, 48 64, 100, 123, 147.
Lupan A., 2.
Lupescu C., 10, 12 23, 46, 47, 48, 62, 64, 75, 85, 99, 100, 121 147.
Lupescu V. E., 41.

Macovski E., 2.
Mahrenholz J., 119.
Maior A., 10.
Mănescu M., 33.
Mang Ileana, 64.
Mangeron I. D., 132, 146.
Manoil A., 41, 73.
Monolache Edra 73, 147.
Manolescu G., 96.
Manolescu I. N., 41, 61, 86.
Mansion P., 32.
Manughevici C., 2.

Mărculescu D., 2.
Mardan D. 2.
Mareş Gr., 41.
Margulius M., 62, 98, 110.
Marian V., 33, 40.
Marinescu I., 2.
Marinescu M., 96.
Mariş M., 41.
Măru D., 85.
Mateescu S., 2.
Matei I. A., 123.
Matei D., 98, 111.
Matieş V. I., 86.
Mayer O. 21.
Mecu I., 98.
Mecu M., 98.
Mehedinţi D., 98.
Melanchton P., 40.
Menelaus, 30 31.
Mereuţă M., 2 75, 88, 98, 110.
Mîclescu A., 97.
Mihăileanu C. A., 124.
Mihăileanu N. N., 2, 41, 62, 76 86, 98, 110, 134, 147.
Mihu C. 21.
Milu N., 121.
Mioc V., 2, 158.
Miquel, 10.
Miranda C., 71.
Mironescu D., 122.
Mocanu A., 85.
Modâlcă S. E., 48 73, 75, 86, 88, 98 99, 100, 111, 122, 136, 147.
Moessner A., 71 76, 96, 116, 122, 135
Moisil G. C., 21, 96, 119.
Moldovan C., 87, 99, 100 111, 147.
Morţun E., 41.
Motaş C., 122.
Motoc M., 62, 110.
Munteanu G. 41.
Munteanu I. G., 61.
Mureşanu O., 100, 147.
Murgu M., 75, 99, 122, 135.
Murgulescu Elena 2.
Murgulescu G. I., 2, 110 .
Musca M., 147.
Musta S., 2, 35, 45.

N. A., 45.
Nadaşan S., 2, 3, 13, 25, 37, 49, 65, 77, 89, 101, 110, 113, 125, 137.
Nadolschi L., 21 40.
Naneş Cornelia 12, 48, 63, 64, 77, 100 112.
Naneş Gh., 2.
Negrea A. M., 22, 36, 46, 47, 62 75, 98, 112 122, 136.
Negulescu E., 35.
Nenciulescu H., 47.
Nestor Gh. D., 41, 120.
Neufeld P., 98.
Neumann Maria, 23, 64.
Nicolae A., 97.
Nicolau A., 2.
Nicolau C., 41.
Nicolau Dobridor I., 41.
Nicolau P., 2.
Nicolau A. T., 71.
Nicolescu M., 21, 119, 148.
Niculescu A., 72, 86.
Niculescu Mizil I., 86.
Niculescu St., 41.
Novacu V., 41.

d'Ocagne M., 25, 26.
Ogrin N., 2.
Onicescu O., 2.
Orăşeanu C., 2.
Orăşeanu Gr. 2.

P. S., 118.
Pantazi Al., 119.
Papadopol D. Elena, 10, 23, 36 45, 88, 100, 147.
Papelier G., 89.
Parapeanu C. I., 98.
Paraschivescu B. D., 61.
Pascal, 13.
Pascariu A., 41.
Paşco W., 132.
Păsculescu V., 98.
Patriciu V., 2, 33.
Păunescu N., 110.
Păuţia Z. I., 41.
Pepolszky C., 123.
Percea V., 97.
Petrescu A., 2.
Petrescu I., 60, 110.
Petrescu S., 21.
Piccard Sophie, 132.
Picone M. 71.
Pitagora, 78.
Pitulescu G., 24.
Plăcinţeanu I., 21, 33, 40.
Podariu A., 41.
Podeanu A., 134.
Poincaré, 119.
Polatsek F., 61.
Pompeiu D., 6, 59, 77, 81, 125, 132.
Pop I. 41.
Popa B. I., 98, 110.
Popa G. I., 41, 120.
Popa M., 75, 122, 123.
Popa P. N., 120.
Popea O. G., 72.
Popeanu A. G., 72.
Popescu I. A., 41, 75, 99, 111, 136 147.
Popescu-Zorica A., 122.
Popescu N. C., 2, 41.
Popescu E., 2.
Popescu Iancu, 97.
Popescu Il., 2.
Popescu N. I., 41.
Popescu C. S., 110.
Popoviciu A., 41.
Popoviciu G. 73.
Popoviciu I. I., 41.
Popoviciu I. T., 86, 97.
Popoviciu T., 21, 60, 86, 132.
Porumbescu D., 122.
Ptolemeu, 146.
Postelnicescu M. C., 63.
Potopeanu G., 41.
Predoescu I. M., 2, 98.
Protopopescu I., 2.
Purcariu I., 2.
Purcel At., 62.
Puiseux, 68.

Raabe, 10.
Racliş N. R., 2, 96.
Radoslav I., 10, 12, 23 47, 76.
Radu I., 100, 147.
Rădulescu A., 100, 147.
Rădulescu C. M., 41.
Rădulescu O., 135.
Rădulescu V., 96.
Răduleţ R., 2.
Râmniceanu I. C., 41.
Răpianu V., 41.
Reghiş P., 110.
Reischer H., 87, 99, 122.
Ripianu D., 119.
Rizescu I., 86, 132, 146.
Roboiu N., 147.
Rodriguez, 71.
Rogojan A., 98.
Rohr A., 147.
Roibănescu C., 2.
Roman I., 41.
Rosca G., 98.
Roşu Al., 33.
Roth A., 111, 122.
Rusanda G., 41.
Rusu C., 98.
Rusu L. M., 45.

Saegiu C., 121, 122.
Sâmbotin G., 98.
Samovici I., 85.
Şandor V., 147.
Săruleşteanu I. E. 100, 148.
Sauciuc L., 2.
Savin C. I., 2, 41.
Savovici F., 98.
Scărlătescu E., 2.
Schapira S., 10, 35 147.
Schileru I., 2, 61, 73, 85, 86.
Schroten, 146.
Schram Edith, 2.
Scorpan A., 2.
Scripcă L., 33.
Scripcă M., 41.
Segal Joe, 75, 122.
Segal Z., 75 111, 122, 136, 147.
Segârceanu D. C., 41.
Selmereanu H., 111, 147.
Şeptilici-Comăneşti R., 86.
Şerban C. C., 123, 147.
Şerban T. 98.
Şerbănescu I., 85.
Sergescu P., 2, 10, 13, 40, 77, 78, 79, 80, 84, 97, 119, 132.
Severineanu C., 2.
Sierpinski W., 10.
Silistăneanu C., 61.
Simionescu D. G., 2, 119, 146.
Simionov K., 41.

Simon S. P., 10, 35, 46, 47.
Simson, 98.
Slavov I., 73, 100, 122, 147, 148.
Slioskine, 119.
Smighelschi O., 2.
Smith E. D., 40, 96, 132.
Socolescu T., 96.
Solomon I., 87, 99, 122.
Solomon N., 97.
Sorian O., 45.
Spacu G. P., 41.
Spătaru A., 124, 148.
Sporer, 146.
Sprânceană G., 41.
Staicu N., 99, 123, 147.
Stamate I. I., 45, 64, 76, 100, 111, 112, 121, 122, 123, 124, 135, 147, 148.
Stamatescu I., 2.
Stamatin M., 86.
Stambuleanu A., 2, 132.
Stan A., 2.
Stan I. A., 42.
Stan C., 42.
Stăncescu C., 2, 3.
Stănciulescu D., 41.
Stănciulescu I. C., 97.
Stănescu N. A., 72.
Stantzel E., 2.
Staricco P. J., 84.
Ştefănescu F. M., 75, 99, 100, 122, 124, 135, 147, 148.
Ştefanovici I. M., 10, 73.
Steopoe A., 96.
Stern E., 71.
Stihi E. E., 21.
Stoenescu A., 96, 119.
Stoenescu D. M., 75, 99, 136, 147.
Stoica N. A., 41, 61.
Stoica I. D., 41, 98, 110.
Stoica I. N., 75.
Stoicescu L., 2.
Stoicescu M., 2.
Sudan G., 119.
Suhăţeanu V. Bârlea, 123, 148.
Süli M., 41, 62, 86, 98, 110.
Szymanski P., 132.

Tachella, 10.
Tănăsescu T., 96.
Ţanovici V. C., 41, 61.
Tărăbuţă C. P., 72, 85, 120.
Ţarălungă S., 10, 12, 35, 48, 63.
Taraş V., 41, 42, 97.
Tataru A., 64, 100, 147.
Tauber A., 86.
Tăutu S. T., 110.
Teodorescu C., 2, 3, 96, 97.
Teodorescu N. 41, 96, 119.
Teodosiu A., 2, 61.
Thapliquine, 119.
Thébault V., 12, 72, 76, 88, 112, 124, 136, 148.
Theodorescu N. D., 35, 36, 122.
Theodoru N., 86.
Tică P. M. Gal, 22, 98, 100, 122.
Tilică Şt., 10, 11, 12, 35, 36, 46, 63, 72, 75, 87, 98, 99, 100, 122, 123 135, 136, 147.
Ţino O., 2, 4, 40, 42, 82, 101, 117 132, 144, 146.
Ţiţeica G., 71, 89, 92, 96, 117, 118, 132. 146.
Tolotti C., 71.
Tomescu C. C., 61.
Tomescu G., 97.
Topolescu G., 99, 122.
Toporescu E., 96.
Toscano L., 110.
Trică I., 98 110.
Trofin C., 98, 110.
Turcu A., 122.
Ullea C. T., 41.
Văduva F. M., 10, 11, 23, 35, 136, 147, 148.
Vălcovici V., 2, 33, 40, 86.
Vasilescu C. A., 41, 118.
Vasilescu B., 61.
Vasiliev I., 41.
Vasiliu D., 147.
Vasiliu G. D., 41.
Vasiliu G. G., 41.
Vasiliu I., 84.
Vasiliu M., 41.
Vătăşan O., 86, 97.
Velea G. M., 61.
Venter D., 22, 36.
Venteş, 73, 148.
Veronese, 21.
Viciu A., 2.
Vijelie E. 122, 147.
Viola T., 71.
Vişa E., 2, 21, 42, 113, 147.
Vlad I. V., 2, 3.
Vlădea I. 41.
Vlădescu I., 2.
Vlăduţiu O., 96.
Volterra V., 14.
Voştinariu G., 11, 12, 22, 36 46.
Winkler A., 86.
Yano K., 21.
Zagaican I., 41.
Zăgănescu I., 2.
Zahab N., 98.
Zaharia N. O., 2.
Zaharias Max, 146.
Zamfirescu G. I., 21, 41, 88.
Zapan G., 100.
Zapan Gr., 2, 85, 100.
Zarda I., 86.

Nota redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Profesor *Vasile Mioc*, asistent la Şcoala Politechnică şi Director la lic. Diaconovici Loga, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. (1924, 1927, 1934, 1938, 1947, 1948, 1949, 1955, 1956, 1960); *Boerescu G. P.* (S-lt) (1980, 1981, 1982, 1988); *Deheleanu Gheorghe* (1777, 1778, 1799, 1807, 1818, 1827, 1845, 1856, 1895, 1902, 1923, 1924, 1931, 1933, 1938, 1947, 1949, 1954, 1956, 1980, 1987); *Dobrescu V. Eugen* (1856, 1887, 1916, 1947, 1956, 1933, 1998, 2001); *Ghimuş A. D.* (1955, 1956, 1979) *Godea Ioan* (1931, 1946, 1981, 1987, 1988). *Iosifescu Cicerone* (P., 1856, 1902, 1931, 1980, 1987, 1979). *Kinsky Ioan* (1956, 1981, 1987) *Luca I. Ioan* (P., 1855, 1885, 1891, 1892, 1902, 1914, 1931, 1933, 1938, 1949, 1960, 1987, 1992, 1999) *Mahrenholz Johannes* (N., 1987, 1988, 1991, 1992.) *Morariu M. Iulian* (P., 1947, 1956, 1988, 1995). *Popescu I Adrian* (P., 1664, 1693, 1697, 1855, 1888, 1904, 1919, 1947, 1949, 1955, 1956, 1965, 1979, 1987). *Sabău C.* (1939. 1967. 1969, 1987. 1988, 1989, 2006). *Şipoş Eugen* (1924, 1927, 1656, 1085, 1998, 2006). *Soare M Mircea* (1947, 1987) *Staicu C-tin* (1947 1956, 1987, 2005) *Tarczewski Antoniu* (1987 1988, 1998). *Ţarălungă Savel* (1817, 1902 1907 1987). *Wegener Eugen* (1924, 1927, 1934, 1938, 1947, 1956, 1969, 1980, 1987, 1992, 2006, 2008).

Rugăm pe corespondenţii a ne trimite din timp costul abonamentului de 180 (una sută optzeci) lei pe anul curent.

BIBLIOTECA ... STRAIN
SIBIU

5 lei